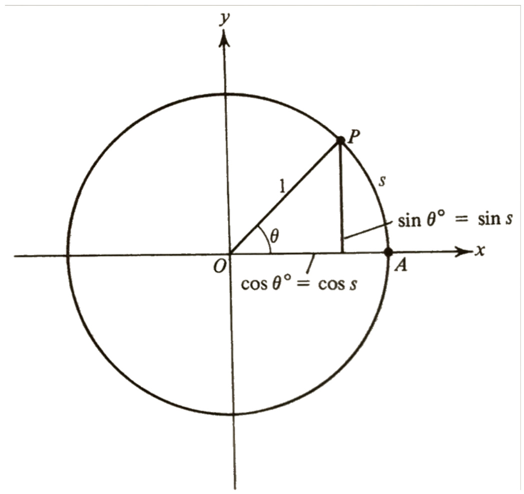
Funciones Trigonométricas

Definición 1. *Dado un circulo de radio 1 y un punto P sobre el circulo a un ángulo θ, definimos*



$$\cos\theta = Abcisa\ de P$$

$$\operatorname{sen}\theta = Ordenada\ de P$$

Si S es el mismo ángulo medido en radianes y $|S|$ es la longitud del arco $\widehat{AP}$ entonces

$$\cos S = Abcisa\ de P$$

$$\operatorname{sen} S = Ordenada\ de P$$

La relación entre ángulos y radianes la podemos escribir en términos de las funciones

$$f(x) = g\left(\frac{2\pi x}{360}\right), \quad g(x) = f\left(\frac{360x}{2\pi}\right)$$

Ejemplo Tenemos que para un ángulo de 90° se tiene

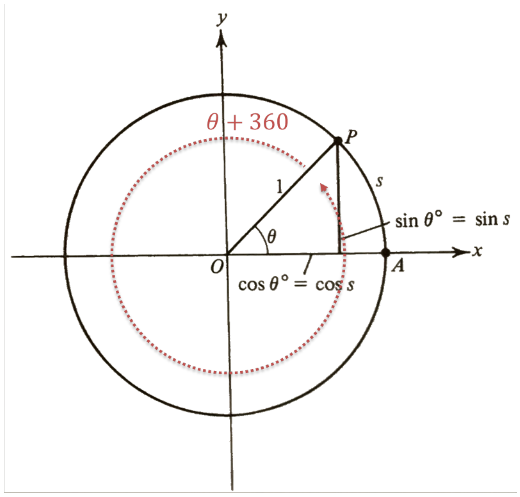
$$f(90) = \frac{2\pi(90)}{360} = \frac{\pi 180}{360} = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo Tenemos que para un ángulo de $\dfrac{\pi}{2}$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{360\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi} = \frac{360(\pi)}{4\pi} = 90$$

(1) Dado que $\theta = \theta + 360$ se tiene entonces que

$$\cos(x+360) = \cos(x) \quad y \quad \operatorname{sen}(x+360) = \operatorname{sen}(x), \quad \forall\ x$$



consecuentemente $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ son funciones periódicas

(2) Por definición $\cos\theta = Abcisa\ de\ P$ y como $-1 \leq Abcisa\ de\ P \leq 1$ entonces

$$|\cos\theta| \leq 1$$

Por definición $\operatorname{sen}\theta = Ordenada\ de\ P$ y como $-1 \leq Ordenada\ de\ P \leq 1$ entonces

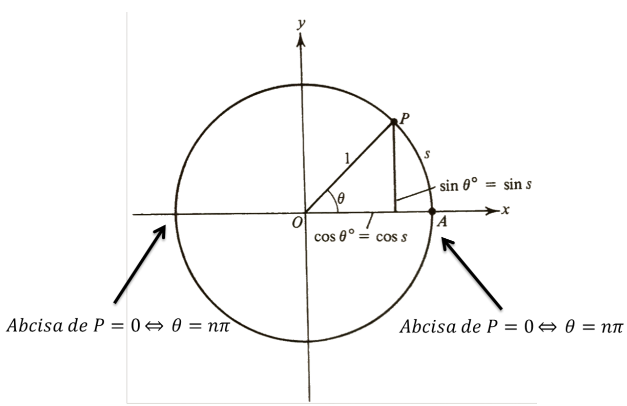
$$|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$$

(3) Se tiene que

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \quad y \quad \operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x), \quad \forall\ x$$

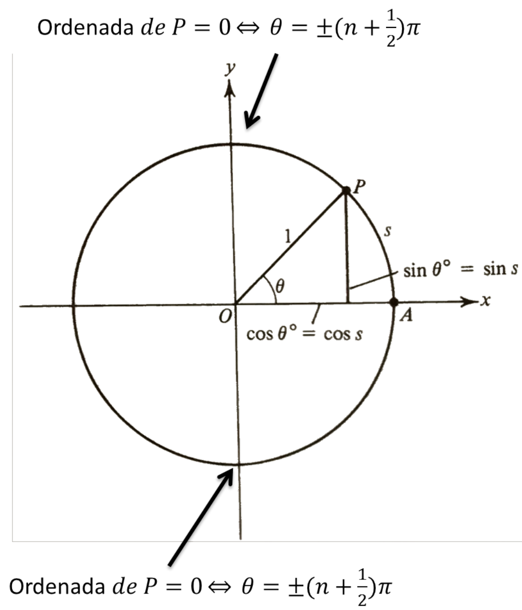
(4) Por definición $\cos\theta = Abcisa\ de\ P$ se tiene entonces

$$\cos\theta = 0 \iff \theta = \pm\pi$$



(5) Por definición $\operatorname{sen}\theta = Ordenada\ de\ P$ se tiene entonces

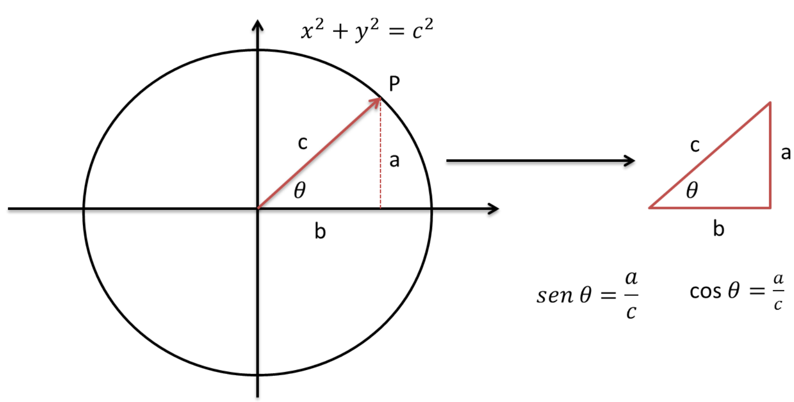
$$\operatorname{sen}\theta = 0 \;\Leftrightarrow\; \theta = \pm\frac{\pi}{2}$$



(6) Definimos

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta},\quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta},\quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

(7) Si tenemos un circulo de radio c entonces



$$b^2 + a^2 = c^2 \;\Rightarrow\; \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = 1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$$

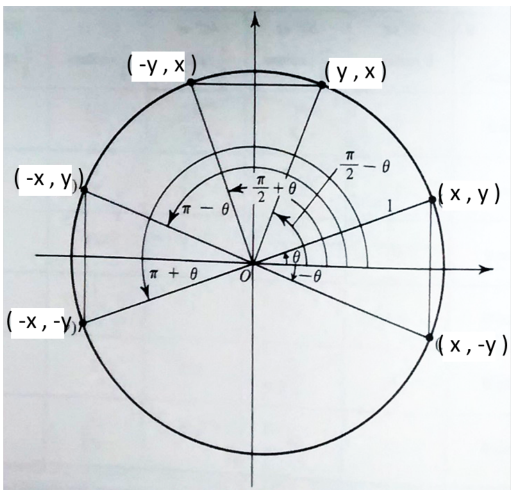
por definición

$$\cos\theta = \frac{b}{c} \quad y \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{a}{c} \;\Rightarrow\; c\cos\theta = b \quad y \quad c\operatorname{sen}\theta = a$$

Ejemplo Vamos a calcular los valores de 45, en este caso se tiene

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \; y \; c = 1 \;\Rightarrow\; \cos\,45 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{sen}\,45 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan\,45 = 1, \quad \cot\,45 = 1, \quad \sec\,45 = \sqrt{2}, \quad \csc\,45 = \sqrt{2}$$

Ejercicio Según la figura



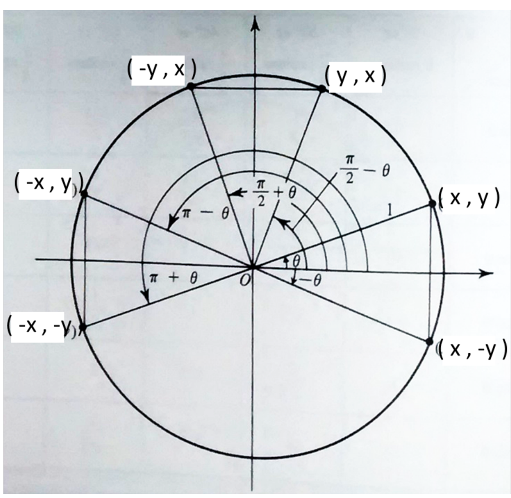
Para $P = (x, y)$ se tiene que el ángulo es θ por lo que

$$\cos\theta = x, \quad y \quad \operatorname{sen}\theta = y$$

Para el $P = (y, x)$ se tiene que el ángulo es $\frac{\pi}{2} - \theta$ por lo que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = y \;\Rightarrow\; \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$



Para $P = (-y, x)$ se tiene que el ángulo es $\frac{\pi}{2} + \theta$ por lo que

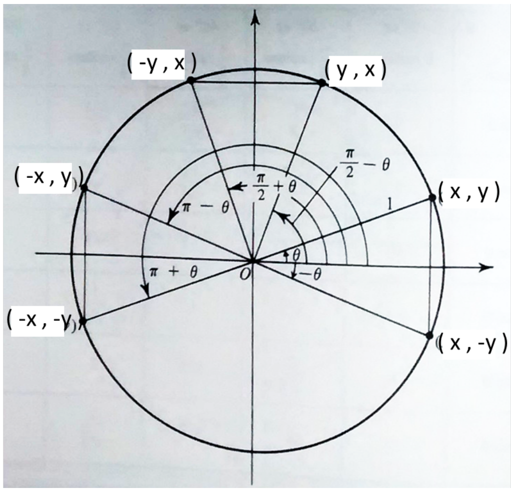
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -y \;\Rightarrow\; \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = x \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$$

Para $P = (-x, y)$ se tiene que el ángulo es $\pi - \theta$ por lo que

$$\cos(\pi - \theta) = -x \;\Rightarrow\; \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}(\pi - \theta) = y \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$$



Para $P = (-x, -y)$ se tiene que el ángulo es $\pi + \theta$ por lo que

$$\cos(\pi + \theta) = -x \Rightarrow \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}(\pi + \theta) = -y \Rightarrow \operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

Para $P = (x, -y)$ se tiene que el ángulo es $\pi + \theta$ por lo que

$$\cos(-\theta) = x \Rightarrow \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -y \Rightarrow \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

de esto último podemos decir que $\cos\theta$ es una función par
de esto último podemos decir que $\operatorname{sen}\theta$ es una función impar
Podemos encontrar ahora el valor de las siguientes funciones trigonométricas

$$\tan(-\theta) = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\operatorname{sen}(-\theta)} = -\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = -\cot\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$$

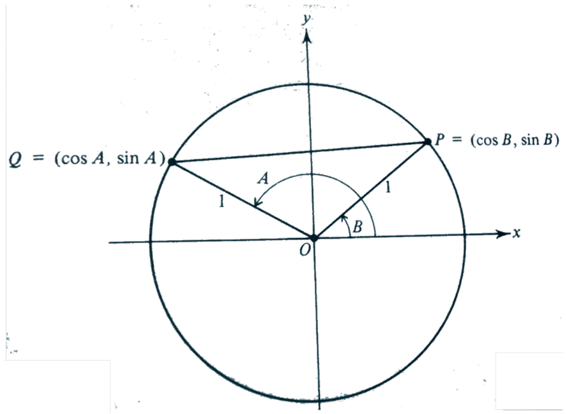
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(\pi - \theta) = \frac{\cos(\pi - \theta)}{\operatorname{sen}(\pi - \theta)} = \frac{-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = -\cot\theta$$



Según la figura por la fórmula de la distancia

$$|PQ|^2 = (\cos A - \cos B)^2 + (\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B)^2$$

$$= \cos^2 A - 2\cos A\cos B + \operatorname{sen}^2 - 2\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B + \cos^2 B + \operatorname{sen}^2 B$$

$$= 2 - 2(\cos B\cos A + \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B)$$

Ahora según la ley de cosenos

$$|PQ|^2 = 2 - 2\cos(A - B)$$

por lo tanto

$$2 - 2\cos(A - B) = 2 - 2(\cos B\cos A + \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B)$$

simplificando

$$\cos(A - B) = \cos B\cos A + \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$$

Si en la fórmula anterio sustituimos B por $-B$ se tiene

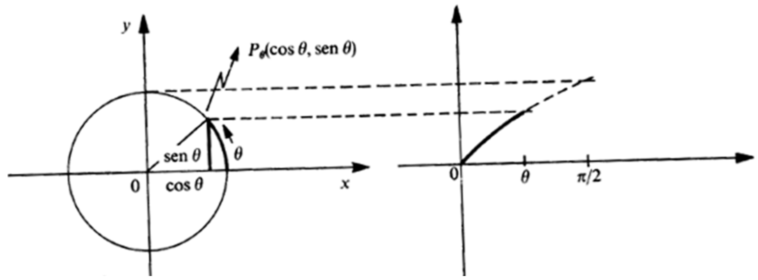
$$\cos(A + B) = \cos(A - (-B)) = \cos(-B)\cos A + \operatorname{sen} A\operatorname{sen}(-B) = \cos B\cos A - \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$$

Si en la fórmula anterior sustituimos B *por* $B + \dfrac{\pi}{2}$

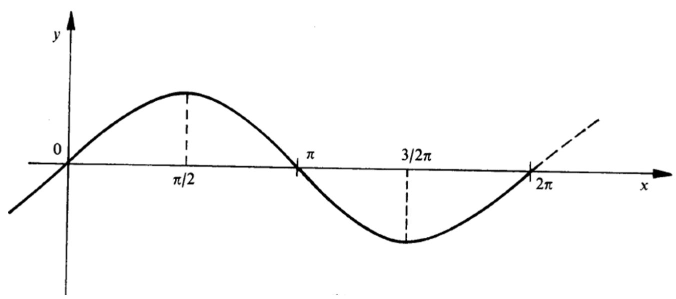
$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A\cos B + \cos A\operatorname{sen} B$$

Gráficas de las Funciones Trigonométricas

Gráfica de la función Seno Por la definición de la función seno, cada punto $(\theta, \text{sen } \theta)$ de la gráfica de esta función tiene la misma segunda coordenada que el punto P_θ. Por tanto, para la gráfica de la función seno puede utilizarse la figura siguiente



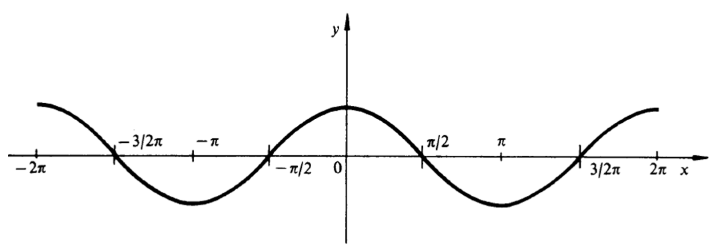
Cuando θ toma valores entre 0 y 2π, la ordenada del punto P_θ varía desde 0 hasta 1. Entre $\dfrac{\pi}{1}$ y π, la ordenada decrece desde 1 haste cero. De π a $\dfrac{3\pi}{2}$, la ordenada se hace negativa y varía entre 0 y -1. Por último, de $\dfrac{3\pi}{2}$ a 2π, la ordenada de P_θ crece desde -1 hasta cero.



Gráfica de la función Coseno A partir de la fórmula

$$\cos\ \theta = \text{sen}\ \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

se sigue que la gráfica de la función coseno es

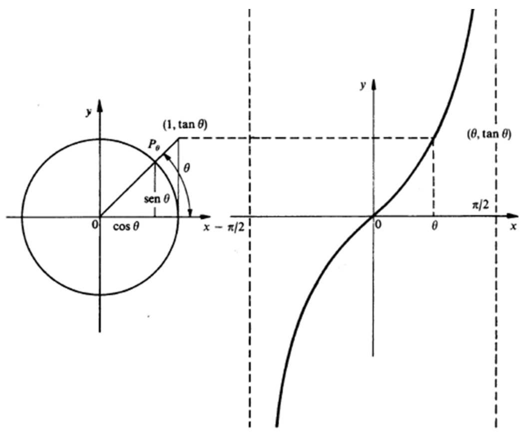


Gráfica de la función tangente Si θ es la medida en radianes de un ángulo, la función tangente es el cociente de la función sen entre la función cos, es decir,

$$\tan\theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos\ \theta}$$

. La tangente no está definida para todos aquellos ángulos en los que el coseno se anula, es decir,

$$Dom_{\tan\ \theta} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

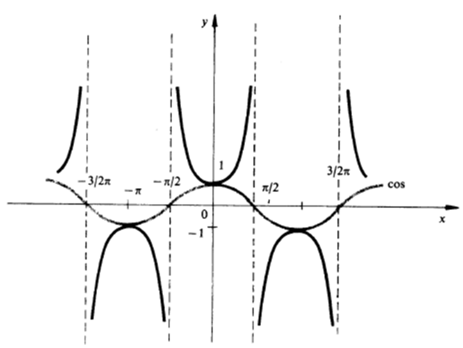


Gráfica de la función secante Si θ es la medida en radianes de un ángulo, la función secante es el cociente de la función constante 1 entre la función cos, es decir,

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\ \theta}$$

. La secante no está definida para todos aquellos ángulos en los que el coseno se anula, es decir,

$$Dom_{\tan\ \theta} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

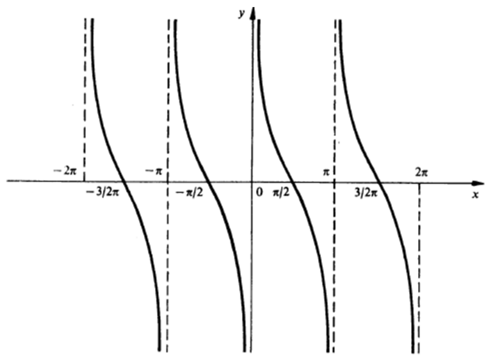


Gráfica de la función Cotangente Si θ es la medida en radianes de un ángulo, la función tangente es el cociente de la función constante 1 entre la función tan, es decir,

$$\cot\theta = \frac{\cos\ \theta}{\text{sen}\ \theta}$$

. La cotangente no está definida para todos aquellos ángulos en los que el seno se anula, es decir,

$$Dom_{\cot\ \theta} = \mathbb{R} - \left\{(2k)pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

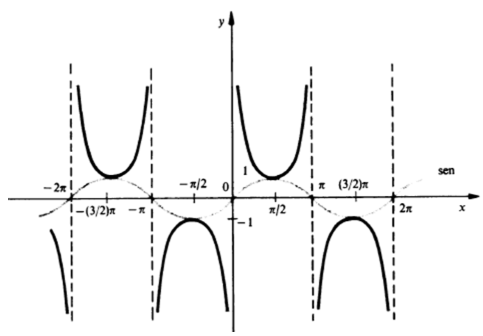


Gráfica de la función cosecante Si θ es la medida en radianes de un ángulo, la función cosecante es el cociente de la función constante 1 entre la función sen, es decir,

$$\sec\theta = \frac{1}{\text{sen}\ \theta}$$

. La cosecante no está definida para todos aquellos ángulos en los que el seno se anula, es decir,

$$Dom_{\csc\ \theta} = \mathbb{R} - \left\{(2k)pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

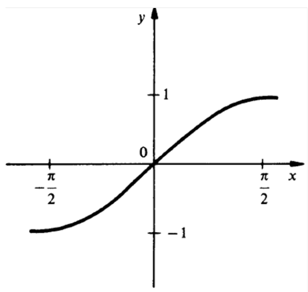


Funciones Trigonométricas Inversas

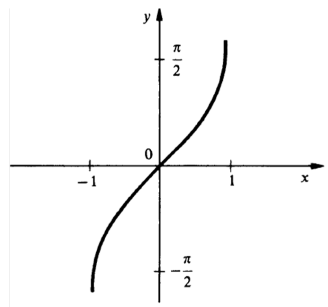
Al restringir el dominio de las funciones trigonometricas sobre ciertos intervalos se obtienen funciones biyectivas las cuales tienen una inversa.

Función arcoseno $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ definida como $f(x) = \text{sen}(x)$ es inyectiva y sobre por lo que existe $f^{-1}\left[-1, 1\right] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y se define como $\text{sen}^{-1}(y) = x$ de tal manera que
$\text{sen}^{-1}(\sin(x)) = \left[\text{sen}^{-1} \circ \sin\right](x) = \text{id}(x) = x$

$\text{sen}(\text{sen}^{-1}(x) = (\text{sen} \circ \text{sen}^{-1})(x) = \text{id}(x) = x$



$y = sen(x)$



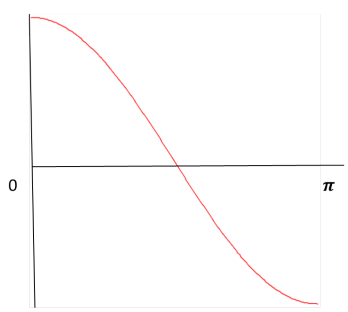
$sen^{-1}(y) = x$

Ejemplo Evaluar $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{x})$

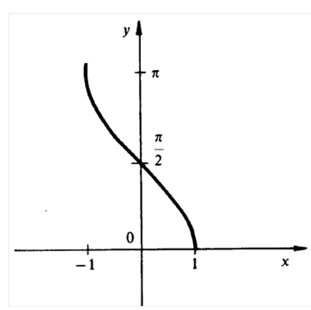
Solución Como $-1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 1$ entonces $y = \sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow \sin(y) = \sin(\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})) \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin(y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y como $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ entonces $\sin(y) = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$

Función arcocoseno $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ definida como $f(x) = \cos(x)$ es inyectiva y sobre por lo que existe $f^{-1}\left[-1, 1\right] \to [0, \pi]$ y se define como $\cos^{-1}(y) = x$ de tal manera que
$\cos^{-1}(\cos(x)) = \left[\cos^{-1} \circ \cos\right](x) = \text{id}(x) = x$

$\cos(\cos^{-1}(x) = (\cos \circ \cos^{-1})(x) = \text{id}(x) = x$



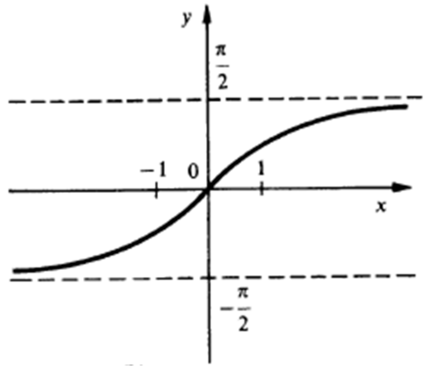
$y = \cos(x)$



$cos^{-1}(y) = x$

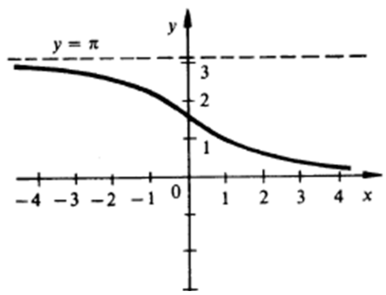
Función arcotangente $\tan(x) = y \Leftrightarrow \tan^{-1}(y) = x$. Donde

$$Dom_{\text{arctan}} = (-\infty, \infty) \quad imagen = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



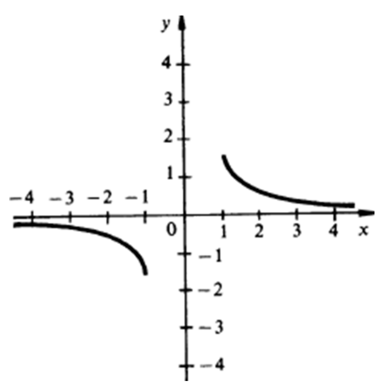
Función arcocotangente $\cot(x) = y \Leftrightarrow \cot^{-1}(y) = x$. Donde

$$Dom_{\cot^{-1}} = [-\infty, \infty] \quad imagen = (0, \pi)$$



Función arcocosecante $\csc(x) = y \Leftrightarrow \csc^{-1}(y) = x$. Donde

$$Dom_{\csc^{-1}} = [-\infty, -1] \cup [1, \infty] \quad imagen = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup, \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$



Función arcosecante $\sec(x) = y \iff \sec^{-1}(y) = x$. Donde

$$Dom_{\sec^{-1}} = [-\infty, -1] \cup [1, \infty] \quad imagen = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup, \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$