Ecuaciones Cartesianas y Paramétricas del Plano en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Sean $v_1 = (1, 3, -1)$ y $v_2 = (2, 1, 3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v_1, v_2) &= \{c_1(1, 3, -1) + c_2(2, 1, 3) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(c_1 + 2c_1, 3c_1 + c_2, -c_1 + 3c_2) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \mid x = (c_1 + 2c_1,\ y = 3c_1 + c_2,\ z = -c_1 + 3c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

En otros términos, se tiene de la última expresión

$$\begin{aligned} x &= c_1 + 2c_1 \\ y &= 3c_1 + c_2 \\ z &= -c_1 + 3c_2 \end{aligned}$$

que puede contemplarse como un sistema de tres ecuaciones con dos incognitas $c_1,\ c_2$ el cual tiene solución.

Entonces el hecho de la existencia de soluciones del sistema es equivalente a que $-2x + y + z = 0$. Es decir, el vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de $v_1 = (1, 3, -1)$ y $v_2 = (2, 1, 3)$ si, y solo si $-2x + y + z = 0$. Por lo tanto, el subespacio $\mathcal{L}(v_1, v_2)$ puede ser descrito como

$$\mathcal{L}(v_1, v_2) = \{(x, y, z) \mid -2x + y + z = 0\}$$

que es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ que representa geométricamente un plano que pasa por el origen

En la ecuación del plano

$$2x + y + z = 0$$

esto se puede ver como un producto punto

$$(2, 1, 1) \cdot (x, y, z) = 0$$

es decir, (x, y, z) son todos los vectores perpendiculares al vector $(2, 1, 1)$

Ahora bien si consideramos el producto vectorial de los vectores $v_1 = (1, 3, -1)$ y $v_2 = (2, 1, 3)$ tenemos

$$v_1 \times v_2 = (1, 3, -1) \times (2, 1, 3) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}(9 + 1) - \hat{j}(3 + 2) + \hat{k}(1 - 6) = (10, -5, -5)$$

se puede observar que el conjunto de puntos ortogonales al vector $(10, -5, -5)$ son

$$(10, -5, -5) \cdot (x, y, z) = 0$$

lo que nos lleva a la ecuación del plano

$$10x - 5y - 5z = 0$$

La ecuación del plano del ejemplo es

$$-2x + y + z = 0$$

Podemos notar que ambas ecuaciones representan el mismo lugar geométrico pues:

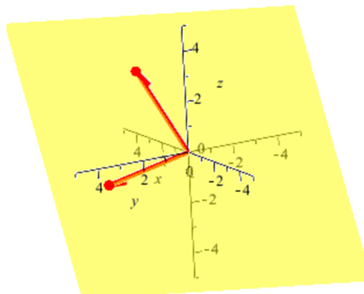
$$10x - 5y - 5z = 0 \Rightarrow -5(-2x + y + z) = 0 \Rightarrow -2x + y + z = 0$$

Forma vectorial de la ecuación del plano La forma vectorial de la ecuacin del plano es

$$P_{P_0,\overline{u},\overline{v}} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = P_0 + \lambda\ \overline{u} + \mu + \overline{v}\}$$

donde $\overline{u},\ \overline{v} \neq 0$, y $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son linealmente independientes, y $\lambda,\ \mu$ toman cualquier valor real.

Ejemplo De nuestro plano $-2x + y + z = 0$



que fue generado con los vectores $v_1 = (1, 3, -1)$ y $v_2 = (2, 1, 3)$ y tomando al vector $P_0 = (0, 0, 0)$ se tiene

$$P_{\{\overline{0},\overline{v_1},\overline{v_2}\}} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = \overline{0} + \lambda\ \overline{v}_1 + \mu\overline{v}_2\} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = (0,0,0) + \lambda\ (1,3,-1) + \mu(2,1,3)\}$$

De esta forma vectorial $P = P_0 + \lambda\ \overline{u} + \mu\overline{v}$ se obtiene otra muy útil con sólo recordar que el producto vectorial de dos vectores es perpendicular a ambos, resulta

$$P - P_0 = \lambda\ \overline{u} + \mu\overline{v}$$

y si denotamos $\hat{n} = \overline{u} \times \overline{v}$, como el producto vectorial se distribuye sobre la suma de vectores y saca escalares, al multiplicar escalarmente por $\hat{n}$ ambos miembros de esta igualdad obtenemos

$$(P - P_0) \cdot (\overline{u} \times \overline{v}) = (\lambda\ \overline{u} + \mu\overline{v})(\overline{u} \times \overline{v})$$

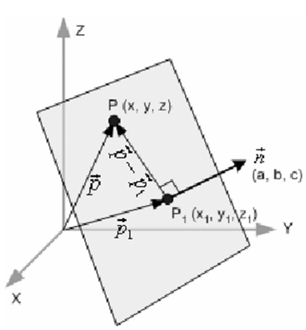
y obtenemos

$$(P - P_0) \cdot (\overline{u} \times \overline{v}) = 0$$

es decir

$$(P - P_0) \cdot \hat{n} = 0$$

que expresa el hecho geométrico de que para cualquier punto P en el plano $P_{P_0,\overline{u},v}$ el vector $P - P_0$ es perpendicular al vector $\hat{n}$



$(P - P_1) \cdot \hat{n} = 0$

Ahora bien de la ecuación vectorial podemos obtener la forma general, si tomamos $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $\hat{n} = (A, B, C)$ y obtenemos

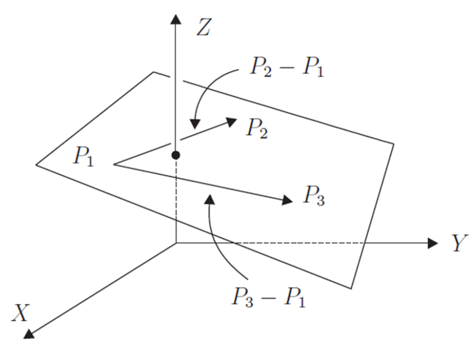
$$\begin{aligned}(P - P_0) \cdot (\overline{u} \times \overline{v}) = 0 &\Rightarrow ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot (A, B, C) = 0 \\ &\Rightarrow \ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0 \\ &\Rightarrow \ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \\ &\Rightarrow \ Ax + By * Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0\end{aligned}$$

haciendo $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ se tiene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Otra forma de la ecuación del plano resulta cuando fijamos tres puntos P_1, P_2 y P_3 ubicados en el plano pero no colineales; entonces los vectores $P_2 - P_1$ y $P_3 - P_1$ juegan el papel de $\overline{u}$ y $\overline{v}$ de la ecuación vectorial y cualquiera de los puntos puede jugar el papel de punto de apoyo para dar lugar a la forma determinada por tres puntos de la ecuación del plano:

$$P_{P_1,P_2,P_3} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = P_1 + \lambda\ (P_2 - P_1) + \mu(P_3 - P_1)\}$$



La última forma de la ecuación del plano es la forma paramétrica, sólo que a diferencia de los casos de la recta en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, en los que hay sólo un parámetro, para un plano hay dos parámetros, dos grados de libertad que escribiremos como s y t. Esta forma resulta cuando en la ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(u_1, u_2, u_3) + t(v_1, v_2, v_3)$$

da a lugar a

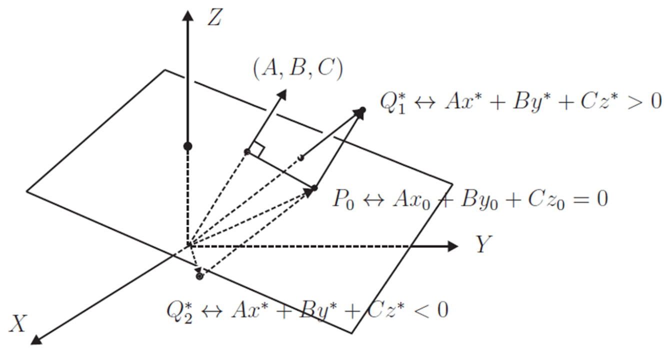
$$\begin{aligned}x &= x_0 + su_1 + tv_1 \\ y &= y_0 + su_2 + tv_2 \\ z &= z_0 + su_3 + tv_3\end{aligned}$$

donde s y t pueden tomar cualquier valor real.

Semiespacios En la ecuación general del plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

¿Qué ocurre cuando un punto $Q'(x', y', z')$ no pertenece a un plano dado y sustituimos sus coordenadas en la ecuación general de dicho plano? Por la propiedad de tricotomía, el número $Ax' + By' + Cz' + D$ sólo puede ser mayor o menor que 0.



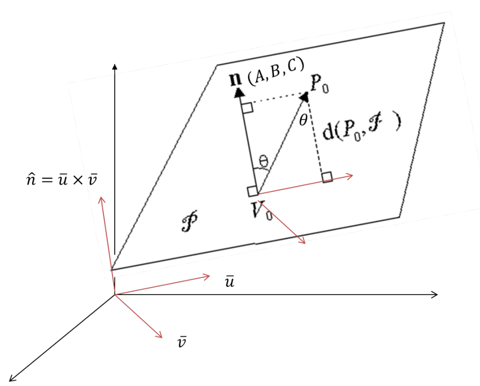
Por tanto, los puntos en uno de los lados del plano darán lugar a un número positivo y los del otro lado darán lugar a un número negativo; lo anterior da una interpretación geométrica a la definición formal siguiente.

Definición 1. *Un semiespacio es cualquiera de las regiones del espacio separadas por un plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$, y cada uno están caracterizado por una de las desigualdades*

$$Ax + By + Cz + D > 0$$

$$Ax + By + Cz + D < 0$$

Distancia de un punto a un plano Dado un punto P_0 fuera del plano P, su distancia es la perpendicular al plano



según la figura

$$\cos\ \theta = \frac{d(P_0, P)}{\|P_0 - V_0\|}$$

por otro lado

$$\cos\ \theta = \frac{(P_0 - V_0) \cdot (A, B, C)}{\|P_0 - V_0\|\ \|(A, B, C)\|}$$

por lo tanto

$$\frac{d(P_0, P)}{\|P_0 - V_0\|} = \frac{(P_0 - V_0) \cdot (A, B, C)}{\|P_0 - V_0\|\ \|(A, B, C)\|} \Rightarrow d(P_0, P) = \frac{|(P_0 - V_0) \cdot (A, B, C)|}{\|(A, B, C)\|} = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$