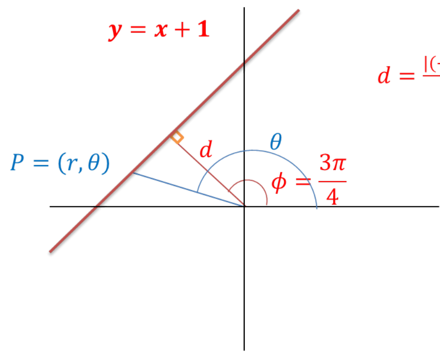
Rectas en coordenadas polares

Ejemplo Hallar la ecuación en forma polar de la recta $y = x + 1$

Solución En este caso desde la recta $y = x + 1$ trazamos un segmento perpendicular al origen cuya magnitud es $d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y al tomar un punto $P = (r, \theta)$ sobre la recta



tenemos entonces que según la fórmula $r = \dfrac{d}{\cos(\theta - \phi)}$ se tiene

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\cos\ \theta\ \cos\ \frac{3\pi}{4} + \text{sen}\ \theta\ \text{sen}\ \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\cos\ \theta\ \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + \text{sen}\ \theta\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{-\cos\ \theta\ + \text{sen}\ \theta}$$

Vamos a comprobar que algebraicamente se llega al mismo resultado, si $x = r\cos\ \theta$ y $y = r\,\text{sen}\ \theta$ entonces

$$y = x + 1 \ \Rightarrow\ r\,\text{sen}\ \theta = r\cos\ \theta + 1 \ \Rightarrow\ r(\text{sen}\ \theta - \cos\ \theta) = 1 \ \Rightarrow\ r = \frac{1}{\text{sen}\ \theta - \cos\ \theta}$$

Ejemplo Procediendo de manera análoga se tiene que

1. La ecuación en forma polar de la recta $y = -x + 1$ es
$$r = \frac{1}{\sqrt{2}(\cos\ \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right))} = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\cos\ \theta\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{sen}\ \theta\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \frac{1}{\cos\ \theta + \text{sen}\ \theta}$$

2. La ecuación en forma polar de la recta $y = x - 1$ es
$$r = \frac{1}{\sqrt{2}(\cos\ \left(\theta - \frac{7\pi}{4}\right))} = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\cos\ \theta\ \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \text{sen}\ \theta\ \text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)} = \frac{1}{\cos\ \theta - \text{sen}\ \theta}$$

3. La ecuación en forma polar de la recta $y = -x - 1$ es
$$r = \frac{1}{\sqrt{2}(\cos\ \left(\theta - \frac{5\pi}{4}\right))} = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\cos\ \theta\ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \text{sen}\ \theta\ \text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)} = \frac{-1}{\cos\ \theta + \text{sen}\ \theta}$$

Ejemplo Encuentre la ecuación de la recta $y = x$ en coordenadas polares

Solución Considerando $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ tenemos que

$$\begin{aligned} x = y &\Rightarrow r\cos\theta = r\operatorname{sen}\theta \\ &\Rightarrow \cos\theta = \operatorname{sen}\theta \\ &\Rightarrow 1 = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \\ &\Rightarrow 1 = \tan\theta \\ &\Rightarrow \arctan(1) = \theta \\ &\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \theta \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación buscada es $\frac{\pi}{4} = \theta$

Ejemplo Dada la recta $\theta = \frac{\pi}{3}$ hallar su ecuación cartesiana

Solución Considerando $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &\Rightarrow \frac{\pi}{3} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ &\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{y}{x} \\ &\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{y}{x} \\ &\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{x} \\ &\Rightarrow \sqrt{3})\frac{y}{x} \\ &\Rightarrow \sqrt{3}x = y \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación buscada es $\sqrt{3}x = y$