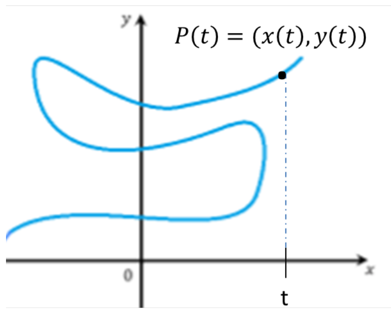
Curvas paramétricas

Supongamos que en un plano cartesiano dibujamos una curva, y que el punto de la curva correspondiente al instante t se denota por P(t)



entonces, como los puntos del plano pueden ubicarse mediante su abscisa y su ordenada, la dependencia de t indica que cada coordenada es función de t, es decir

$$P(t) = (x(t), y(t))$$

donde t es el parámetro y x(t), y(t) son las ecuaciones paramétricas de la curva. De hecho, toda curva correspondiente a la grá?ca de una función real de variable real, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene como ecuaciones paramétricas

$$x = x, \quad y(x) = f(x)$$

Lo mismo ocurre para la curva descrita por un punto que se mueve en el espacio cartesiano dependiendo de un parámetro,

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Ejemplo Parametrice la recta cuya ecuación cartesiana es $x + 2y - 4 = 0$

Solución Tenemos que

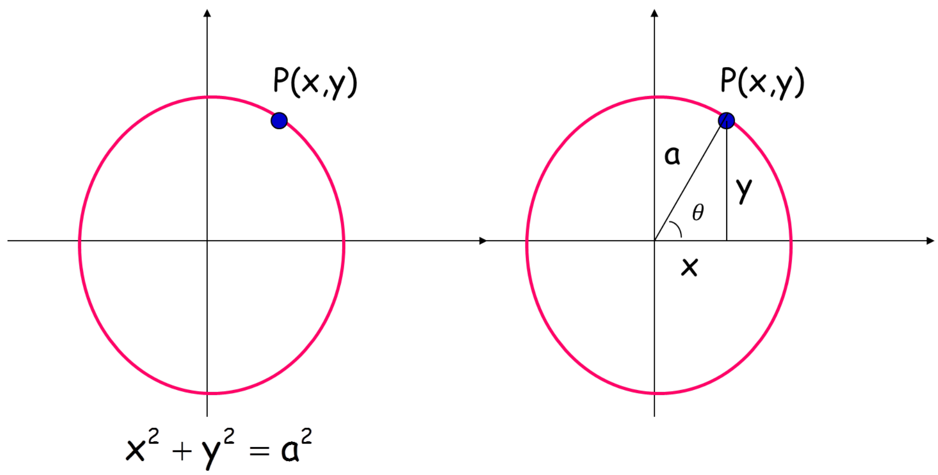
$$x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 - 2y$$

aquí se observa que y es libre, podemos asignarle un parámetro t y hacemos $y = t$ por lo que

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = t \end{cases}$$

y definimos $f(t) = (4 - 2t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$

Circulo Hallar las ecuaciones paramétricas del círculo de radio a



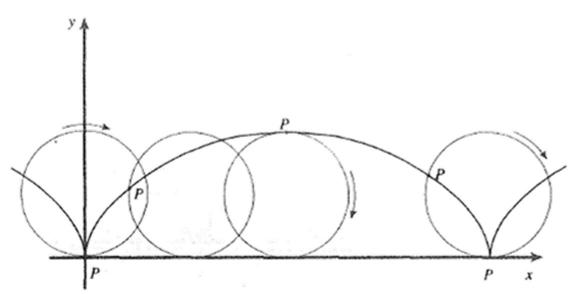
Según la figura, dado un punto P en el circulo y tomando las proyecciones a los ejes coordenados se tiene

$$P = \begin{cases} x = a \ \cos \ \theta \\ y = a \ \text{sen} \ \theta \end{cases} \quad \theta \in \ [0, 2\pi]$$

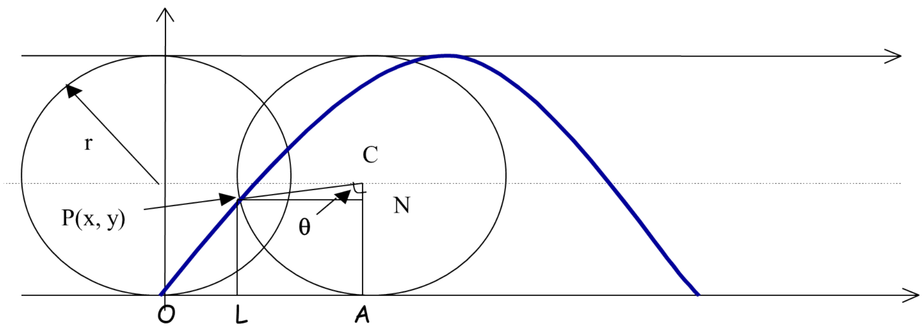
por lo tanto

$$f(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (a \ \cos \ \theta, a \ \text{sen} \ \theta)$$

Cicloide Una curva muy importante en matemáticas es la llamada CICLOIDE, definida como la curva que describe un punto fijo de una circunferencia de radio a, la cual rueda, sin deslizarse, a una velocidad constante sobre el eje x.



Para obtener sus ecuaciones paramétricas procedemos de la siguiente manera



Según la gráfica se tiene

$$x = OL = OA - LA$$

por otro lado

$$OA = arc\ PCA = r\theta$$
$$LA = PN = r \text{ sen } \theta$$

Por lo tanto

$$x = r\theta - r \,\text{sen}\ \theta$$

De manera análoga, según la gráfica se tiene

$$y = LP = AC - NC$$

por otro lado

$$AC = r$$
$$NC = r \cos \theta$$

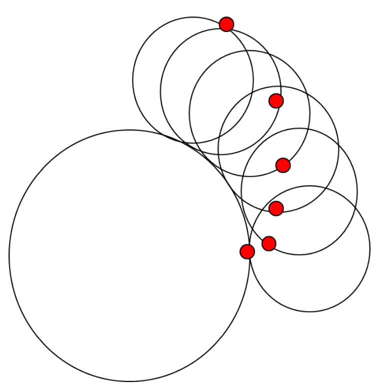
Por lo tanto

$$y = r - r\cos \theta$$

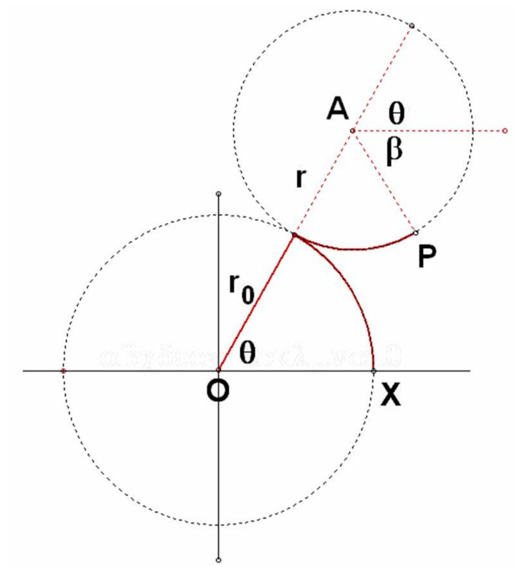
por lo tanto

$$f(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (r\theta - r \,\text{sen}\ \theta, r - r\cos \theta)$$

Epicicloide Si un punto P es fijo sobre una circunferencia y esta circunferencia está rodando, sin resbalar, sobre otra circunferencia, la trayectoria descrita por el punto P se denomina Epicicloide



Para obtener sus ecuaciones paramétricas procedemos de la siguiente manera



De la figura se observa que para el punto A

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r_0 + r} \Rightarrow (r_0 + r)\cos(\theta) = x$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{y}{r_0 + r} \Rightarrow (r_0 + r)\operatorname{sen}(\theta) = y$$

por tanto las coordenadas del punto A son:

$$A = ((r_0 + r)\cos(\theta), (r_0 + r)\operatorname{sen}(\theta))$$

Ahora bien como el punto P se encuentra en un círculo de radio r podemos parametrizar dicho círculo asi:

$$P \in (r\cos\beta, r\operatorname{sen}\beta)$$

ademas según la figura

$$\angle OAP - \beta + \theta = \pi \Rightarrow \beta = \angle OAP + \theta - \pi$$

también

$$O\widehat{A}P = O\widehat{A}X \Rightarrow \theta \times r_0 = \angle OAP \times r \Rightarrow \frac{\theta \times r_0}{r} = \angle OAP$$

por lo tanto

$$\beta = \frac{\theta \times r_0}{r} + \theta - \pi \Rightarrow P \in \left(r\cos\left(\frac{\theta \times r_0}{r} + \theta - \pi\right), r\operatorname{sen}\left(\frac{\theta \times r_0}{r} + \theta - \pi\right)\right)$$

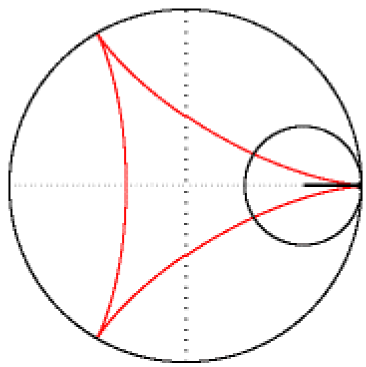
$$\Rightarrow P \in \left(-r\cos\left(\frac{\theta \times r_0}{r} + \theta\right), -r\operatorname{sen}\left(\frac{\theta \times r_0}{r} + \theta\right)\right)$$

Por lo tanto las coordenadas del punto P desde O son:

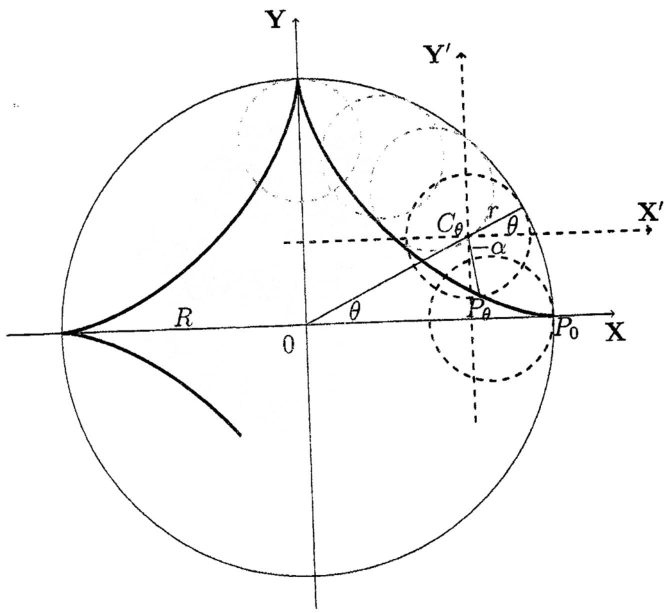
$$x = \left((r_0 + r)\cos(\theta) - r\cos\left(\frac{\theta \times r_0}{r} + \theta\right)\right)$$

$$y = \left((r_0 + r)\,\mathrm{sen}(\theta) - r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta \times r_0}{r} + \theta\right)\right)$$

Hipocicloide Es una curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar dentro de otra circunferencia fija



Para obtener sus ecuaciones paramétricas procedemos a partir de la figura de la siguiente manera



1. Tenemos la igualdad de las longitudes de los arcos

$$R\theta = r(\theta + \alpha)$$

en la figura el ángulo α se mide en dirección de las manecillas del reloj desde X' al punto P_θ de ahí el signo menos

2. El centro C_θ de la circunferencia interior está dado por

$$((R-r)\cos\ (\theta), (R-r)\,\text{sen}\ \theta)$$

3. Las coordenadas de los puntos P_θ de la hipocicloide con respecto al sistema coordenado punteado son

$$(r\cos(-\alpha), r\,\text{sen}(-\alpha)) = (r\cos(\alpha), -r\,\text{sen}(\alpha))$$

4. Las coordenadas de P_θ en el sistema de coordenadas con centro en 0 resulta de sumarle C_θ y como

$$\alpha = \frac{R-r}{r}\theta$$

5. Se tiene que

$$\left((R-r)\cos\ (\theta) + r\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right), (R-r)\,\text{sen}\ (\theta) - r\,\text{sen}\left(\frac{R-r}{r}\theta\right)\right)$$