El Espacio Euclideo $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Definición 1. *Como conjunto,* $\mathbb{R}^2$ *es la colección de todas las parejas ordenadas de números reales. Es decir*

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2)|x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2\}$$

Definición 2. *Como conjunto,* $\mathbb{R}^3$ *es la colección de todas las ternas ordenadas de números reales. Es decir*

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)|x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3\}$$

Estructura Algebraica

Definición 3. *La suma* $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *para dos elementos* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ *se define asi:*

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

Definición 4. *Definimos* $\overline{0} \in \mathbb{R}^n$ *como*

$$\overline{0} = (0, 0, ..., 0)$$

Observación.-El elemento $\overline{0}$ es el único elemento de $\mathbb{R}^n$ que se comporta como neutro para la suma. Para cada elemento $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ existe exactamente un elemento $\overline{b} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{a} + \overline{b} = 0$.
A dicho elemento lo denotamos $-\overline{a}$

Definición 5. *El producto escalar* $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *para* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *se define asi:*

$$\lambda \cdot \overline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

Estructura Geométrica

Para dotar de una estructura geométrica al espacio $\mathbb{R}^n$ (que incluya los conceptos de distancia, ángulo y ortogonalidad) debemos dotar a $\mathbb{R}^n$ de un producto escalar.

Producto Escalar

Definición 6. *Sea* V *un espacio vectorial, un* ***producto escalar ó producto punto*** *en* V *es una función de* $V \times V$ *en* $\mathbb{R}$ *que a cada par de vectores* $\overline{x}, \overline{y}$ *le asocia un número*

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \overline{x} \cdot \overline{y} = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle > 0$ *si* $x \neq 0$
2. $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \langle \overline{y}, \overline{x} \rangle$
3. $\langle \lambda\overline{x}, \overline{y} \rangle = \lambda\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$
4. $\langle \overline{x} + \overline{y}, \overline{z} \rangle = \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle + \langle \overline{y}, \overline{z} \rangle$

Teorema 1. *La función de* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *con valores*

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \overline{x} \cdot \overline{y} = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

es un producto escalar o producto punto

Demostración. Tenemos que

$$a) \quad \langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = \overline{x} \cdot \overline{x} = (x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0 \quad si \quad x \neq 0$$

$$b) \quad \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \overline{x} \cdot \overline{y} = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 = (y_1, y_2) \cdot (x_1, x_2) = \langle \overline{y}, \overline{x} \rangle$$

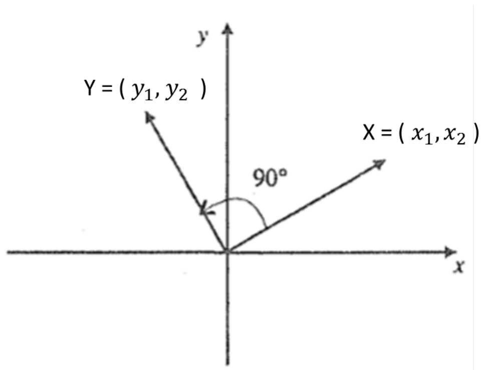
$$c) \quad \lambda \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \lambda (\overline{x} \cdot \overline{y}) = \lambda ((x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2)) = \lambda (x_1 y_1 + x_2 y_2) = (\lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2) =$$
$$([\lambda x_1] y_1 + [\lambda x_2] y_2) = (\lambda \overline{x} \cdot \overline{y}) = \langle \lambda \overline{x}, \overline{y} \rangle$$

$$d) \quad \langle \overline{x} + \overline{y}, \overline{z} \rangle = (\overline{x} + \overline{y}) \cdot \overline{z} = ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \cdot (z_1, z_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \cdot (z_1, z_2) = ((x_1 + y_1) z_1 + (x_2 + y_2) z_2)$$
$$= (x_1 z_1 + y_1 z_1 + x_2 z_2 + y_2 z_2) = (x_1 z_1 + x_2 z_2 + y_1 z_1 + y_2 z_2 = (\overline{x} \cdot \overline{z}) + (\overline{y} \cdot \overline{z}) = \langle \overline{x}, \overline{z} \rangle + \langle \overline{y}, \overline{z} \rangle$$

□

Ortogonalidad

Suponga que $X, Y \in \mathbb{R}^2$ son perpendiculares



Se tiene entonces que la pendiente de X es $\dfrac{x_2}{x_1}$

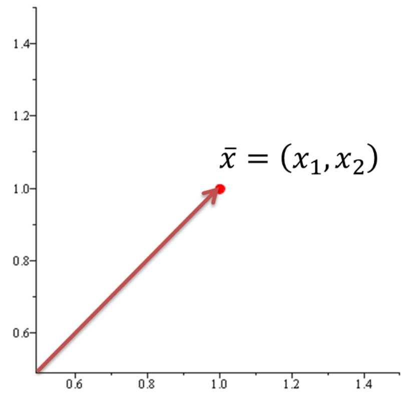
también la pendiente de Y es $\dfrac{y_2}{y_1}$

La condición de perpendicularidad es

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = -1 \;\Rightarrow\; x_2 \cdot y_2 = -x_1 \cdot y_1 \;\Rightarrow\; x_2 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1 = 0 \;\Rightarrow\; X \cdot Y = 0$$

por lo tanto X, Y son perpendiculares si $< \overline{x}, \overline{y} >= \overline{x} \cdot \overline{y} = 0$

Norma (distancia)



Sabemos que

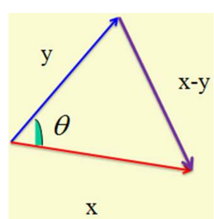
$$d(\overline{0}, \overline{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{x_1x_1 + x_2x_2} = \sqrt{(x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2)} = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}}$$

Un producto escalar ó producto punto $\langle , \rangle$ en un espacio vectorial V da lugar a una noción de longitud de un vector $\overline{x} \in V$, llamada su ***norma***, y definida como

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle} = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}}$$

Ángulo

Sean ahora $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^2$ y sea θ el ángulo entre ellos



Según la ley de los cosenos

$$\|\overline{x} - \overline{y}\|^2 = \|\overline{x}\|^2 + \|\overline{y}\|^2 - 2\|\overline{x}\|\|\overline{y}\| \cos(\theta) \Rightarrow \|\overline{x}\|^2 - 2\overline{x} \cdot \overline{y} + \|\overline{y}\|^2 = \|\overline{x}\|^2 + \|\overline{y}\|^2 - 2\|\overline{x}\|\|\overline{y}\| \cos(\theta) \Rightarrow$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \|\overline{x}\|\|\overline{y}\| \cos(\theta)$$

Esta fórmula motiva la siguiente definición de ángulo θ entre dos vectores no nulos $\overline{x}, \overline{y} \in V$, por medio de

$$\theta = \arccos\left(\frac{\overline{x} \cdot \overline{y}\rangle}{\|\overline{x}\|\|\overline{y}\|}\right)$$