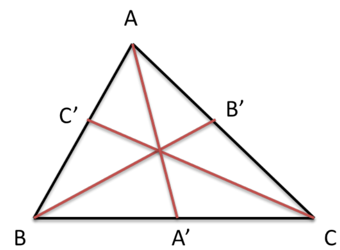
Rectas y puntos notables del Triángulo

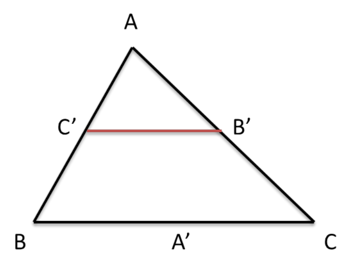
Medianas En un triángulo ABC, los segmentos que van de un vértice al punto medio del lado opuesto se llaman medianas



Si A', B' y C' son los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente, las medianas son AA', BB' y CC'

Lema 1. *El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y de longitud igual a la mitad del tercer lado*

Demostración. Consideramos, en el triángulo ABC, los puntos medios B' y C' de los lados CA y AB respectivamente



se tiene

$$AC' = C'B \quad y \quad AB' = B'C \ \Rightarrow\ \frac{AC'}{C'B} = \frac{AB'}{B'C}$$

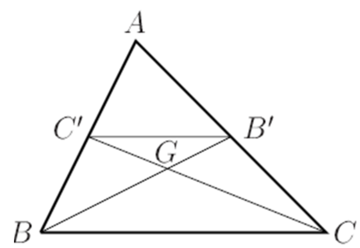
entonces por el teorema de Thales, $B'C'$ es paralelo a BC.
Ahora, como los lados de los triángulos ABC y $AC'B'$ son paralelos, estos triángulos son semejantes y la razón es

$$\frac{AB}{AC'} = 2 = \frac{BC}{C'B'} \ \Rightarrow\ BC = 2C'B'$$

□

Teorema 1. *Las medianas de un triángulo son concurrentes*

Demostración. Sean ABC el triángulo y $A'B'C'$, los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente.



Si G es el punto de intersección de las medianas BB' y CC' y, como los lados de los triángulos GBC y $GB'C'$ son paralelos, los triángulos son semejantes y en razon $2:1$. Luego, las medianas BB' y CC' se cortan en el único punto G que divide a la medias en razon $2:1$.
Asi, G es el único punto sobre BB' con

$$\frac{BG}{GB'} = \frac{2}{1}$$

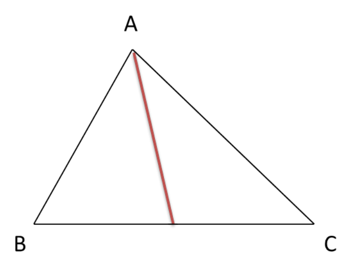
y el único sobre CC' con

$$\frac{CG}{GC'} = \frac{2}{1}$$

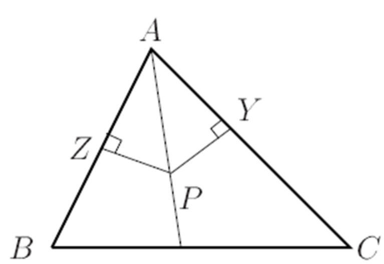
De manera análoga se demuestra que la otra mediana AA' se intersecta con BB' en G. □

El punto de concurrencia de las medianas del triángulo ABC se denota por G y se le llama el **centroide, centro de gravedad, gravicentro o baricentro** del triángulo

Bisectrices La bisectriz interna del ángulo $\angle\, CAB$ del triángulo ABC es la recta por A que divide al ángulo es dos ángulos iguales.

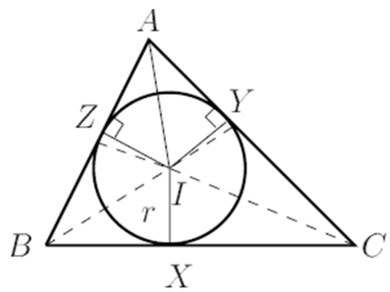


cada punto P de la bisectriz equidista de cada lado del ángulo, esto es, si Z es el pie de la perpendicular de P sobre AB y Y es el pie de la perpendicular de P sobre CA, entonces $PZ = PY$;



esto se sigue de que los triángulos rectángulos AZP y AYP son congruentes.
Recíprocamwente, un punto P dentro del ángulo $\angle CAB$ de un triángulo ABC, que cumpla que $PZ = PY$ (donde Y y Z son los pies de las perpendiculares de P sobre CA y AB) es necesariamente un punto de la bisectriz interna; en efecto, los dos triángulos rectángulos APY y APZ son congruentes (ya que tienen dos pares de lados iguales, a saber PY=PZ, y AP que es común, entonces, por el teorema de Pitágoras, el otro par de catetos son iguales), por tanto $\angle PAZ = \angle PAY$, lo que muestra que P se encuentra sobre la bisectriz.
Teorema 2. *Las bisectrices internas de un triángulo son concurrentes*

Demostración. Si denotamos por b_a, b_b, b_c a las bisectrices internas de los ángulos en A, B, C respectivamente



Sea I el punto de intersección de las bisectrices b_b y b_c (hay un punto de intersección, pues en caso contrario los ángulos en B y C sumarían 180°). Sean X, Y y Z los pies de las perpendiculares de I sobre los lados BC, CA y AB respectivamente. POr esta I en la bisectriz b_c, tenemos que $IX = IY$ y por estar I en la bisectriz b_b, tenemos que $IX = IZ$. Luego I cumple $IX = IZ$, lo que muestra que I se encuentra en la bisectriz b_a. □

El punto de concurrencia de las bisectrices del triángulo ABC se denota por I y se le llama el **incentro** del triángulo ABC.
La distancia del incentro a cada lado del triángulo es la misma, esta distancia se conoce como inradio y se denota con r.
Resulta que la circunferencia de centro I y radio r, está completamente contenida en el triángulo y es tangente a los lados BC, CA, AB, en los puntos X, Y, Z. A esta circunferencia le llamaremos **incírculo**