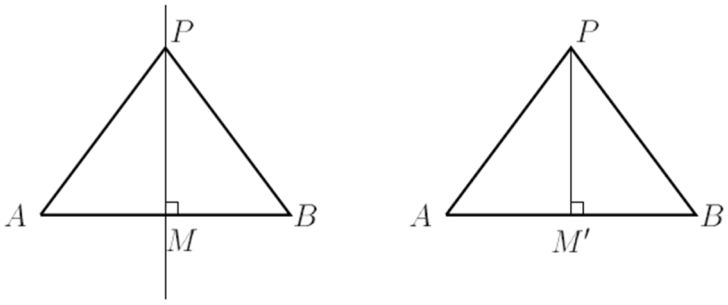
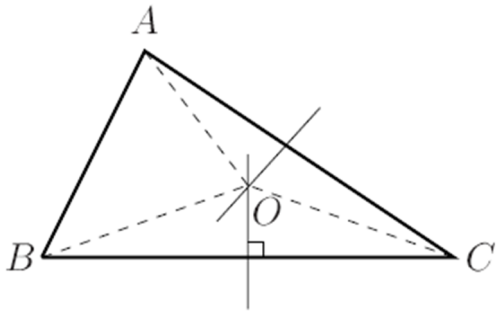
Rectas y puntos notables del Triángulo

Mediatrices La mediatriz de un segmento AB es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio. Una manera de caracterizarla es como el conjunto de puntos P que cumplen que la distancia a cada extremo A, B es la misma, esto es, $PA = PB$. En efecto, si M es el punto medio de AB y P se encuentra en la mediatriz, entonces podemos formar los dos triángulos rectángulos PAM y PBM. Estos triángulos son congruentes (Ya que $AM = MB$, PM es común y los ángulos entre los lados que se comparan son rectos), por tanto $PA = PB$



Recíprocamente, si P es un punto que satisface $PA = PB$ entonces P está sobre la mediatriz de AB.
Para ver esto consideramos M' el pie de la perpendicular de P sobre el segmento AB. Veamos que $M = M'$
Como los triángulos rectángulos PAM' y PBM' tienen dos pares de lados iguales ($PA = PB$ y PM es común), el teorema dePitágoras garantiza que los otros catetos son iguales, esto es, $AM' = M'B$. Por tanto, M' es el punto medio de AB.
Teorema 1. *Las mediatrices de un triángulo son concurrentes*

Demostración. Sean l_a y l_b las mediatrices de los lados BC y CA del triángulo ABC. Sea O el punto de intersección de estas mediatrices (hay un punto de intersección, ya que si son paralelas entonces también BC y CA son paralelos, por lo que no se formaría propiamente un triángulo).

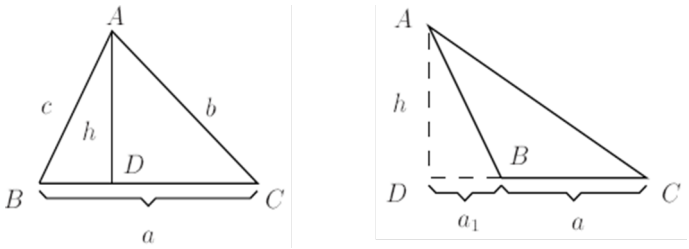


Veamos que el punto O se encuentra también en la mediatriz del segmento AB. Como O está en l_a, $= B = OC$ y como O se encuentra en l_b, $OA = OC$. Luego, O cumple $OA = OB$, esto es, O está

en la mediatriz de AB. □

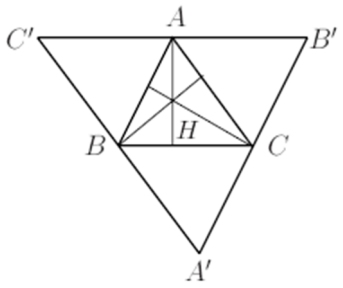
El punto de concurrencia de las mediatrices, que se denota por O, se conoce como el incentro del triángulo ABC. Como los vértices equidistan a O, la circunferencia de centro O y radio R (la distancia común a los vértices) pasa por los vértices. La circunferencia se llama el circuncirculo del triángulo ABC y el radio R el circunradio

Alturas En un triángulo ABC, la altura desde el vértice A es la perpendicular al lado opuesto BC que pasa por A y la denotamos por h_a. De manera similar se definen h_b y h_c las alturas por los vértices B y C.



Teorema 2. *Las alturas de un triángulo son concurrentes.*

Demostración. Sea ABC el triángulo y trazamos por cada vértice la recta que es paralela al lado opuesto de tal vértice.



estas rectas paralelas determinan un triángulo $A'B'C'$. Como ABCB', AC'BC y ABA'C son paralelogramos, tenemos que AB y C son puntos medios de B'C', C'A' y A'B' respectivamente y las alturas de ABC son las mediatrices del triángulo A'B'C' que sabemos, según el resultado de mediatrices, éstas se intersectan. Luego las alturas de ABC son concurrentes □