

Sistemas de ecuaciones lineales

Como las ecuaciones lineales (o de primer grado en todas las variables) corresponden a rectas en R^2 o a planos en R^3 dependiendo de dónde deban considerarse, tomar varias de ellas que deban cumplirse simultáneamente equivale a preguntarse cuál es la intersección de los lugares geométricos.

Definición 1. *Un sistema de ecuaciones es una colección de ecuaciones que deben cumplirse simultáneamente, es decir, un punto es solución del sistema si verifica cada una de las ecuaciones del sistema.*

El sistema general de dos ecuaciones lineales en dos variables tiene la forma

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

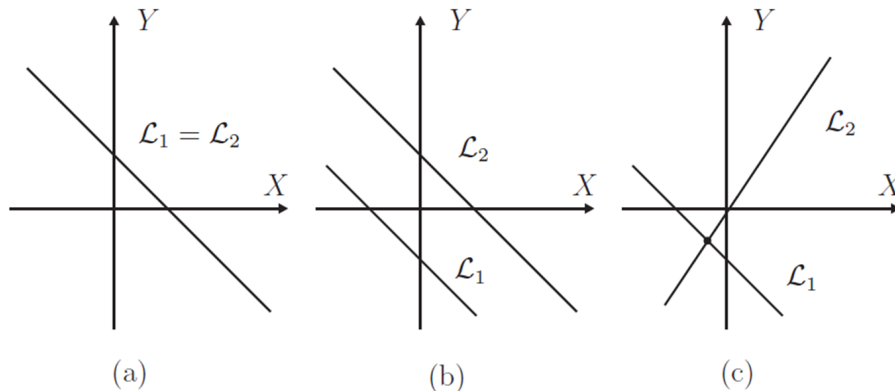
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Sabemos que cada ecuación corresponde a una recta L_i y que los coeficientes de las variables determinan vectores normales (A_1, B_1) y (A_2, B_2) a cada una de las rectas mientras que los términos independientes C_1 y C_2 permiten determinar la distancia orientada de cada una de las rectas al origen mediante la fórmula

$$d(L_i, \bar{0}) = \frac{C_i}{\|(A_i, B_i)\|}$$

Entonces, basta determinar todas las posibles posiciones relativas entre los vectores normales y las distancias orientadas al origen de dos rectas en el plano.

Si los vectores normales (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son paralelos, las rectas pueden coincidir o ser paralelas y la distancia al origen permite distinguir cuál es el caso. En cambio, si los vectores normales son linealmente independientes, las rectas se cortan en un único punto que puede obtenerse utilizando determinantes.



1. Las rectas pueden coincidir (Figura (a)); éste es el caso si las ecuaciones son una múltiplo de la otra, lo cual equivale a que cada uno de los coeficientes de la primera recta sea el mismo múltiplo del correspondiente coeficiente de la segunda recta, es decir,

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2 \quad \text{con } \lambda \neq 0$$

Por tanto, los vectores normales son paralelos y la distancia al origen es la misma:

$$(A_1, B_1) = \lambda (A_2, B_2) \quad \text{y} \quad \frac{C_1}{\|(A_1, B_1)\|} = \frac{C_2}{\|(A_2, B_2)\|}$$

2. Las rectas son paralelas (Figura (b)) sólo si los vectores normales son uno un múltiplo del otro pero las distancias de las rectas al origen difieren, lo cual equivale a

$$(A_1, B_1) = \lambda (A_2, B_2) \quad y \quad C_1 \neq \lambda C_2$$

3. La última posibilidad es que las dos rectas se corten en un sólo punto, lo cual ocurre si y sólo si los vectores normales no son múltiplos uno del otro, es decir,

$$(A_1, B_1) \neq \lambda (A_2, B_2) \quad para \quad todo \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables

En general, dos planos en el espacio tienen puntos en común, pues para que dos planos no se corten sus vectores normales deben satisfacer la condición de ser paralelos y, además, las distancias al origen de ambos planos deben ser distintas.

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

Sabemos que los coeficientes de las variables x , y y z dan lugar a un vector normal al plano correspondiente y que los términos independientes permiten determinar las distancias orientadas del plano al origen mediante la fórmula

$$d(P_i, \bar{0}) = \frac{D_i}{\|(A_i, B_i, C_i)\|}$$

las posibilidades para tres planos son:

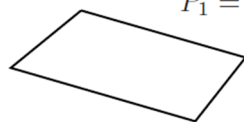
1. Los tres planos pueden ser coincidentes; para ello es necesario que las dos últimas ecuaciones sean cada una un múltiplo de la primera, es decir, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$(A_2, B_2, C_2) = \lambda(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_2 = \lambda D_1$$

$$(A_3, B_3, C_3) = \mu(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_3 = \mu D_1$$

es decir los vectores normales a los tres planos son paralelos y las distancias al origen coinciden

$$P_1 = P_2 = P_3$$



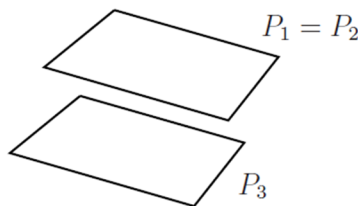
2. Dos de los planos coinciden y el tercero es paralelo; entonces la segunda ecuación es un múltiplo de la primera y para la tercera sólo los coeficientes que determinan el vector normal son múltiplo de los correspondientes coeficientes de la primera ecuación, mientras que el término independiente no

debe ser ese mismo múltiplo del término independiente de la primera ecuación; en símbolos, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$(A_2, B_2, C_2) = \lambda(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_2 = \lambda D_1$$

$$(A_3, B_3, C_3) = \mu(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_3 = \mu D_1$$

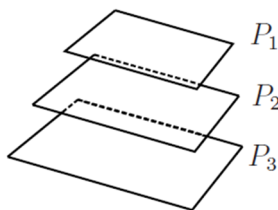
lo cual significa que los vectores normales a los tres planos son paralelos y dos de las distancias al origen coinciden mientras la tercera difiere



3. Si los tres planos son paralelos, los vectores normales de los dos últimos son cada uno múltiplo del vector normal del primero pero las distancias al origen son todas distintas; eso implica que existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$(A_2, B_2, C_2) = \lambda(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_2 \neq \lambda D_1$$

$$(A_3, B_3, C_3) = \mu(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_3 \neq \mu D_1$$

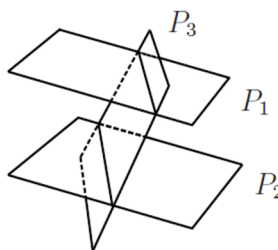


4. Cuando dos de los planos son paralelos y el tercero los corta, el vector normal del segundo es múltiplo del vector normal del primero pero las distancias no guardan la misma relación, y el vector normal del tercer plano no es múltiplo del vector normal del primer plano, es decir, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$(A_2, B_2, C_2) = \lambda(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_2 \neq \mu D_1$$

y, además, para todo $\mu \in \mathbb{R}$,

$$(A_3, B_3, C_3) = \mu(A_1, B_1, C_1)$$

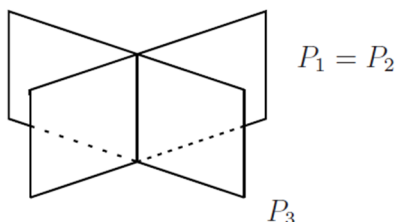


5. Cuando dos de los planos coinciden y el tercero los corta, la segunda ecuación es múltiplo de la primera pero el vector normal del tercer plano no es múltiplo del vector normal del primer plano; en símbolos, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$(A_2, B_2, C_2) = \lambda(A_1, B_1, C_1) \quad y \quad D_2 = \lambda D_1$$

y, además, para todo $\mu \in \mathbb{R}$,

$$(A_3, B_3, C_3) \neq \mu(A_1, B_1, C_1)$$

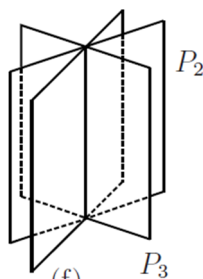


6. Si los tres planos tienen una recta en común, como las hojas de un libro, las ecuaciones son linealmente dependientes pues el tercer plano pertenece al haz de planos que contienen a la recta de intersección de los dos primeros; entonces los vectores normales son linealmente dependientes y los términos lineales satisfacen la misma combinación que los vectores normales, esto es, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$(A_3, B_3, C_3) = \lambda(A_1, B_1, C_1) + \mu(A_2, B_2, C_2) \quad y \quad D_3 = \lambda D_1 + \mu D_2$$

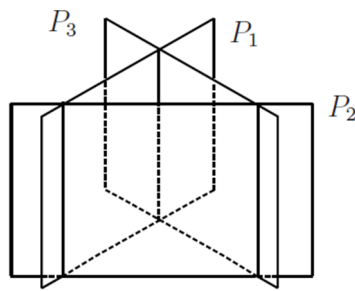
y, además, para todo $\mu \in \mathbb{R}$,

$$(A_3, B_3, C_3) \neq \mu(A_1, B_1, C_1)$$



7. Si los tres planos son como las caras de un prisma triangular, los vectores normales son linealmente dependientes pero los términos independientes no satisfacen la misma combinación lineal que los vectores, es decir, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$(A_3, B_3, C_3) = \lambda(A_1, B_1, C_1) + \mu(A_2, B_2, C_2) \quad y \quad D_3 \neq \lambda D_1 + \mu D_2$$



8. Si los tres planos son como las caras de una pirámide triangular, sus vectores normales no son linealmente dependientes y, en consecuencia, el determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

es no nulo.

´ Esta es la caracterización algebraica de que los tres planos se corten en un único punto, (el vértice de la pirámide). Se dice que los tres planos están en posición general, pues para que tres vectores del espacio sean linealmente dependientes debe existir una combinación lineal no trivial de ellos que dé lugar al vector $(0, 0, 0)$.

