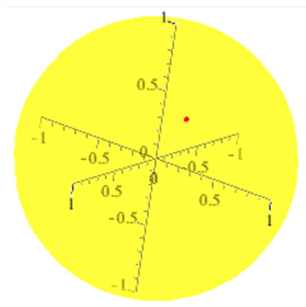
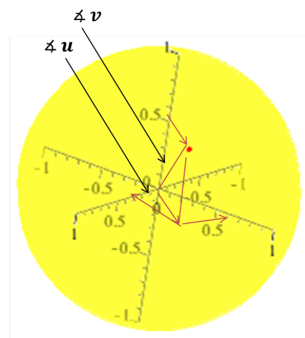
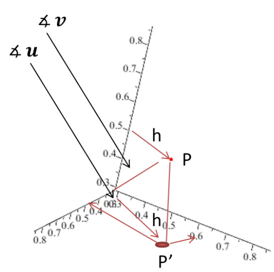
Superficies Parametricas

La parametrización de una superficie puede obtenerse de diferentes formas, a continuación obtendremos las parametrizaciones de algunas superficies a partir del lugar geometrico.

Esfera Una esfera de radio a centrada en el origen

Nos fijamos en P' proyección de P en el plano XY



según la figura

$$\cos(u) = \frac{x'}{h} \quad \operatorname{sen}(u) = \frac{y'}{h} \quad \Rightarrow \quad x' = h\cos(u), \quad y' = h\operatorname{sen}(u)$$

para el punto p se tiene

$$\cos(v) = \frac{z}{a} \quad \operatorname{sen}(v) = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad z = a\cos(v), \quad h = a\operatorname{sen}(v)$$

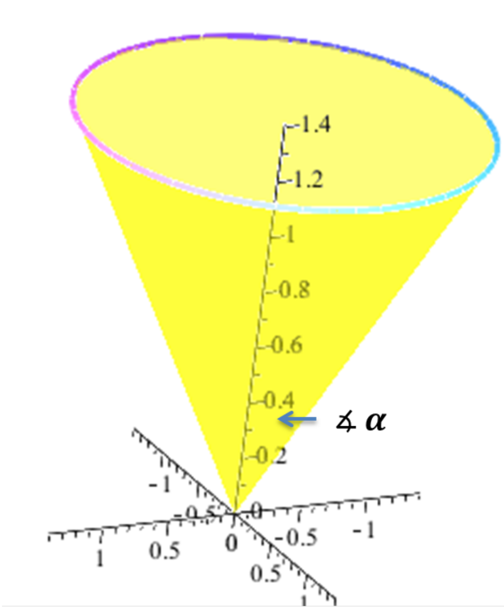
por lo tanto las coordenadas del punto P que describen el lugar geometrico son

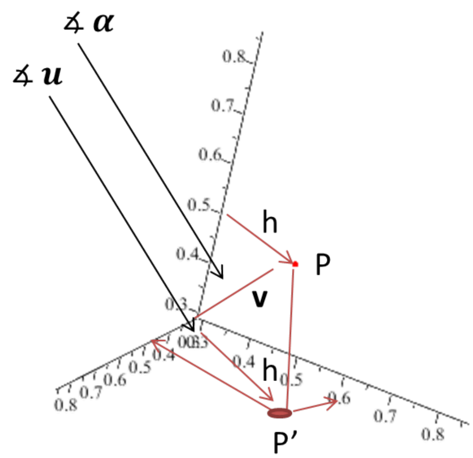
$$(x', y', z) = (h\cos(u), h\operatorname{sen}(u), a\cos(u)) \underbrace{=}_{h=a\operatorname{sen}(v)} (a\operatorname{sen}(v)\cos(u), a\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u), a\cos(u))$$

y una parametrización de la esfera es:

$$f(u, v) = (a\operatorname{sen}(v)\cos(u), a\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u), a\cos(u)) \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, \pi]$$

Cono Un cono con vértice en el origen





Nos fijamos en P' proyección de P en el plano XY según la figura

$$\cos(u) = \frac{x'}{h} \quad \operatorname{sen}(u) = \frac{y'}{h} \quad \Rightarrow \quad x' = h\cos(u), \quad y' = h\operatorname{sen}(u)$$

para el punto p se tiene

$$\cos(\alpha) = \frac{z}{v} \quad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{h}{v} \quad \Rightarrow \quad z = v\cos(\alpha), \quad h = v\operatorname{sen}(\alpha)$$

por lo tanto las coordenadas del punto P que describen el lugar geometrico son

$$(x', y', z) = (h\cos(u), h\operatorname{sen}(u), v\cos(\alpha)) \underbrace{=}_{h=v\operatorname{sen}(\alpha)} (v\operatorname{sen}(\alpha)\cos(u), v\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(u), v\operatorname{sen}(\alpha))$$

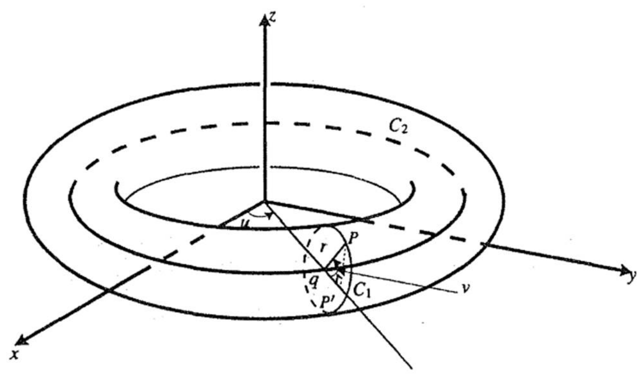
y una parametrización del cono es:

$$f(u,v) = (v\operatorname{sen}(\alpha)\cos(u), v\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(u), v\operatorname{sen}(\alpha)) \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, \pi], \quad \alpha = k \quad fijo$$

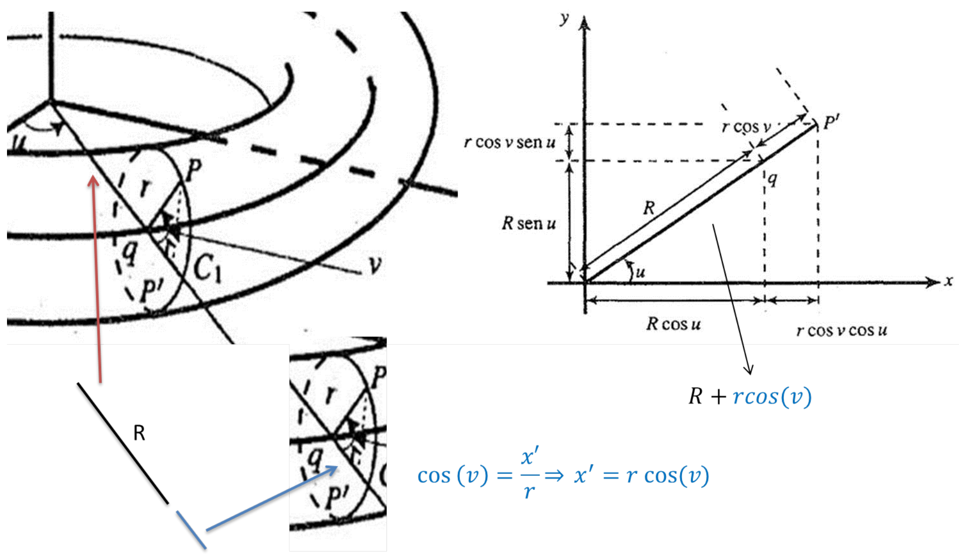
Toro

Ejemplo Parametrización del TORO

Para esto tomemos un circulo C_1 de radio r y hagamoslo girar alrededor del eje Z. Llamemos R a la distancia del centro de C_1 al eje de rotación. Se tiene asi un circulo C_2 de radio R. A la superficie generada por C_1 se le llama TORO. Vamos a obtener su parametrización. Designemos por u, v los ángulos mostrados en la figura



Se trata de describir las coordenadas x, y, z del punto P en términos de los parámetros u, v. Se tiene



según la figura

$$\cos(u) = \frac{x'}{R + r\cos(v)}, \quad \text{sen}(u) = \frac{y'}{R + r\cos(v)} \quad \Rightarrow \quad x' = (R{+}r\cos(v))\cos(u), \quad y' = (R{+}r\cos(v))\sin(u)$$

$$\text{sen}(v) = \frac{z}{r} \quad \Rightarrow \quad z = r\,\text{sen}(v)$$

Las coordenadas de P' seran

$$x' = R\cos(u) + r\cos(v)\cos(u) \quad y' = R\,\mathrm{sen}(u) + r\cos(v)\,\mathrm{sen}(u)$$

Estas también serán las coordenadas x, y del punto P. La coordenada z se obtiene del triángulo y es $z = r\,\mathrm{sen}(v)$
por lo tanto una parametrización del toro será

$$f(u,v) = (x', y', z) = (R\cos(u)+r\cos(v)\cos(u), R\,\mathrm{sen}(u)+r\cos(v)\,\mathrm{sen}(u), r\,\mathrm{sen}(v)) \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi]$$