Tangente a Cónicas

Dada una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A,B,C,D,E,F son constantes, con A,B y C no siendo todos nulos.
La cual representa como ya hemos visto una cónica
Vamos a tratar de encontrar una recta tangente a dicha cónica
Para ello vamos a derivar esta ecuación implicitamente

$$\begin{aligned}
Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 &\Rightarrow 2Ax + By + Bxy' + 2Cyy' + D + Ey' = 0\\
&\Rightarrow Bxy' + 2Cyy' + Ey' = -2Ax - By - D\\
&\Rightarrow (Bx + 2Cy + E)y' = -2Ax - By - D\\
&\Rightarrow y' = \frac{-2Ax - By - D}{Bx + 2Cy + E}
\end{aligned}$$

Esta última expresión representa le pendiente de la recta tangente en el punto $Q(x, y)$. La ecuación de la recta tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ es

$$y - y_1 = -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + 2Cy_1 + E}(x - x_1)$$

de donde

$$\begin{aligned}
y - y_1 = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E}(x - x_1) &\Rightarrow (Bx_1 + 2Cy_1 + E)(y - y_1) = (-)(2Ax + By + D)(x - x_1)\\
&\Rightarrow (Bx_1 + 2Cy_1 + E)(y - y_1) + (2Ax + By + D)(x - x_1) = 0
\end{aligned}$$

Expandiendo esta última expresión se tiene

$$-2Ax_1^2 - 2Bx_1y_1 - 2Cy_1^2 + 2Ax_1x + B(x_1y + xy_1) + 2Cy_1y + D(x - x_1) + E(y - y_1) = 0$$

$$\Rightarrow \ -2(Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2) + 2Ax_1x + B(x_1y + xy_1) + 2Cy_1y + D(x - x_1) + E(y - y_1) = 0$$

pero

$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 = -(Dx_1 + Ey_1 + F)$$

de donde

$$2(Dx_1 + Ey_1 + F) + 2Ax_1x + B(x_1y + xy_1) + 2Cy_1y + D(x - x_1) + E(y - y_1) = 0$$

$$\Rightarrow \ 2Ax_1x + B(x_1y + xy_1) + 2Cy_1y + D(x - x_1 + 2x_1) + E(y - y_1 + 2y_1) + 2F = 0$$

$$\Rightarrow \ 2Ax_1x + B(x_1y + xy_1) + 2Cy_1y + D(x - x_1) + E(y - y_1) + 2F = 0$$

$$\Rightarrow \ Ax_1x + B\left(\frac{x_1y + xy_1}{2}\right) + Cy_1y + D\left(\frac{x - x_1}{2}\right) + E\left(\frac{y - y_1}{2}\right) + F = 0$$

Tenemos entonces que la ecuación

$$Ax_1x + B\left(\frac{x_1y + xy_1}{2}\right) + Cy_1y + D\left(\frac{x - x_1}{2}\right) + E\left(\frac{y - y_1}{2}\right) + F = 0$$

es la ecuación de la recta tangente a una cónica en el punto (x_1, y_1)

Ejemplo Encontrar la ecuación de la recta tangente a la cónica

$$x^2 - y^2 + 16x + 6y + 56 = 0$$

en el punto $P(-8, 4)$

Solución En este caso

$$x^2 - y^2 + 16x + 6y + 56 = 0 \ \Rightarrow \ xx - yy + 16\left(\frac{x + x}{2}\right) + 6\left(\frac{y + y}{2}\right) + 56 = 0$$

Tomando una de las $x = x_1$ tenemos la ecuación de la recta tangente a la cónica en el punto $P(x_1, y_1)$

$$\Rightarrow \ xx_1 - yy_1 + 16\left(\frac{x + x_1}{2}\right) + 6\left(\frac{y + y_1}{2}\right) + 56 = 0$$

entonces, la recta tangente a la cónica en el punto $P(-8, 4)$ es

$$x(-8) - y(4) + 16\left(\frac{x + (-8)}{2}\right) + 6\left(\frac{y + (4)}{2}\right) + 56 = 0$$

$$\Rightarrow \ -8x - 4y + 8(x - 8) + 3(y + 4) + 56 = 0$$

$$\Rightarrow \ -y + 4 = 0$$