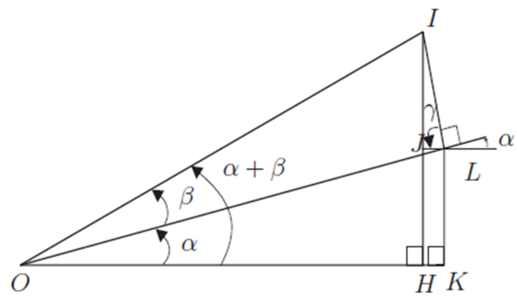
Resolución de triángulos

Ejemplo Obtener el seno de un ángulo que está dado como la suma de otros dos

Solución Consideremos los triángulos rectángulos:



$$\triangle\ OHI \ para\ el\ ángulo\ \alpha+\beta$$

$$\triangle\ KL \ para\ el\ ángulo\ \alpha$$

$$\triangle\ OLI \ para\ el\ ángulo\ \beta$$

Entonces, si aplicamos la definición de seno en el $\triangle\ OHI$ y trazamos JL paralela a HK tenemos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\frac{HI}{OI}=\frac{IJ+LK}{OI}$$

y utilizando el $\triangle\ OKL$,

$$\cos\ \alpha=\operatorname{sen}\ \gamma=\frac{IJ}{IL}\ \Rightarrow\ IL\ \cos\ \alpha=IJ$$

También podemos expresar LK en términos de α, pues como IL es perpendicular a OL,$\gamma=90°-\alpha$ por lo que

$$\operatorname{sen}\ \alpha=\cos\ \gamma=\frac{LK}{OL}\ \Rightarrow\ LK=OL\ \operatorname{sen}\ \alpha$$

Si sustituimos IJ y LK obtenemos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\frac{IL\ \cos\ \alpha\ +OL\operatorname{sen}\ \alpha}{OI}=\frac{IL\ \cos\ \alpha}{OI}+\frac{OL\ \operatorname{sen}\ \alpha}{OI}$$

en el triángulo $\triangle\ OLI$ se tiene

$$\operatorname{sen}\ \beta=\frac{IL}{OI},\quad \cos\ \beta=\frac{OL}{OI}$$

por lo tanto

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\frac{IL\ \cos\ \alpha}{OI}+\frac{OL\ \operatorname{sen}\ \alpha}{OI}=\operatorname{sen}\ \beta\ \cos\ \alpha+\cos\ \beta\ \operatorname{sen}\ \alpha$$

Ejemplo Hallar

$$\tan(\alpha+\beta)$$

Solución En este caso

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\operatorname{sen}\ \beta\ \cos\ \alpha+\cos\ \beta\ \operatorname{sen}\ \alpha}{\cos\ \beta\ \cos\ \alpha-\operatorname{sen}\ \beta\ \operatorname{sen}\ \alpha}\\ &= \frac{\cos\ \beta\ \cos\ \alpha}{\cos\ \beta\ \cos\ \alpha}\left(\frac{\frac{\operatorname{sen}\ \beta}{\cos\ \beta}+\frac{\operatorname{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha}}{1-\frac{\operatorname{sen}\ \beta}{\cos\ \beta}\frac{\operatorname{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha}}\right)\\ &= \frac{\tan\ \alpha+\tan\ \beta}{1-\tan\ \alpha\tan\ \beta}\end{aligned}$$

Razones trigonométricas de la suma de ángulos En este caso

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\ \beta\ \cos\ \alpha+\cos\ \beta\ \operatorname{sen}\ \alpha\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\ \alpha\ \cos\ \beta-\operatorname{sen}\ \alpha\ \operatorname{sen}\ \beta\\ \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\ \alpha+\tan\ \beta}{1-\tan\ \alpha\tan\ \beta}\end{aligned}$$

Razones trigonométricas de la diferencia de ángulos En este caso

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \cos\ \beta\ \operatorname{sen}\ \alpha-\operatorname{sen}\ \beta\ \cos\ \alpha\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\ \beta\ \cos\ \alpha+\operatorname{sen}\ \beta\ \operatorname{sen}\ \alpha\\ \tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\ \alpha-\tan\ \beta}{1+\tan\ \alpha\tan\ \beta}\end{aligned}$$

Algunas identidades

$$\begin{aligned}\cos(90+\phi) &= -\operatorname{sen}\ \phi\\ \operatorname{sen}(90+\phi) &= \cos\ \phi\\ \tan(90+\phi) &= -\tan\ \phi\\ \cos(90-\phi) &= \operatorname{sen}\ \phi\\ \operatorname{sen}(90-\phi) &= \cos\ \phi\\ \tan(90-\phi) &= \cot\ \phi\end{aligned}$$

Ejemplos Usando lo anterior calcule las razones trigonométricas de los ángulos de 75° y 15°

Solución En este caso

$$\cos(75) = \cos(30+45) = \cos\ 30\ \cos\ 45 - \text{sen}\ 30\ \text{sen}\ 45 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{sen}(75) = \text{sen}(30+45) = \text{sen}\ 30\ \cos\ 45 + \text{sen}\ 45\ \cos\ 30 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

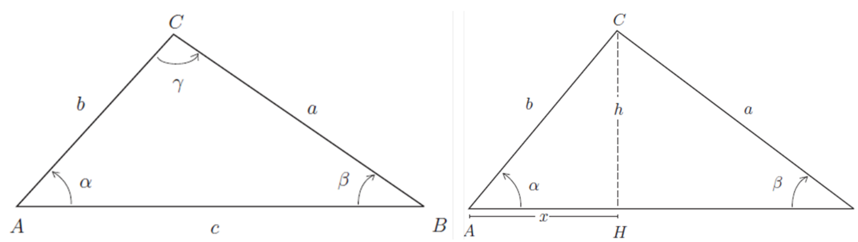
$$\tan(75) = \frac{\text{sen}(75)}{\cos(75)} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\cos(15) = \cos(45-30) = \cos\ 45\ \cos\ 30 + \text{sen}\ 45\ \text{sen}\ 30 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{sen}(15) = \text{sen}(45-30) = \text{sen}\ 45\ \cos\ 30 - \cos\ 45\ \text{sen}\ 30 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\tan(15) = \frac{\text{sen}(15)}{\cos(15)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

Ley de Senos Dado un triángulo cualquiera, denotaremos por A, B y C sus vértices, por α, β y γ los ángulos correspondientes (y también sus medidas), y por a, b y c los respectivos lados opuestos (y sus medidas), como en la figura siguiente.



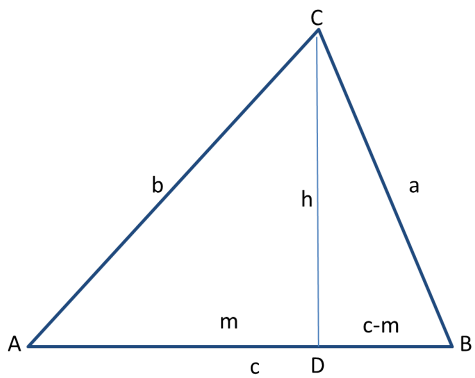
Al trazar la altura desde un vértice cualquiera, por ejemplo C, se determinan dos triángulos rectángulos con ángulo recto en H, el pie de la altura. Tenemos entonces

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{h}{b} \quad y \quad \text{sen}\ \beta = \frac{h}{a}$$

y, en consecuencia, $b\,\text{sen}\ \alpha = a\,\text{sen}\ \beta$ lo cual da lugar a la llamada Ley de los senos:

$$\frac{a}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{b}{\text{sen}\ \beta} = \frac{c}{\text{sen}\ \gamma}$$

Teorema Generalizado de Pitagoras



Dado un triángulo ABC trazamos la altura CD y formamos dos triángulo rectángulos
Para el triángulo CDB se tiene

$$a^2 = (c-m)^2 + h^2 = c^2 - 2cm + m^2 + h^2$$

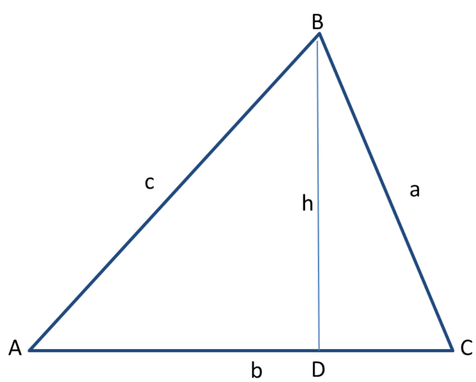
Para el triángulo ADC se tiene

$$b^2 = m^2 + h^2 \ \Rightarrow \ b^2 - m^2 = h^2$$

por lo tanto

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cm$$

Ley de Cosenos



Dado un triángulo ABC trazamos la altura BD
Según el teorema generalizado de pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bAD$$

Por otro lado se tiene

$$\cos A = \frac{AD}{c} \ \Rightarrow \ c \ \cos A = AD$$

por lo tanto

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \ \cos A$$

Procediendo analogamente se tiene

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \ \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \ \cos C$$