Triple Producto Escalar

Dados tres vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\overline{u} = (a, b, c) \quad \overline{v} = (r, s, t) \quad \overline{w} = (x, y, z)$$

con ellos se busca el de formar primero el producto vectorial y luego el producto punto de $\overline{u}$ con $\overline{v} \times \overline{w}$. Hay una forma sencilla de obtener el resultado de este triple producto escalar, como lo muestra el cálculo siguiente:

$$\overline{u} \cdot \overline{v} \times \overline{w} = a \begin{vmatrix} s & t \\ y & z \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} r & t \\ x & z \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} r & s \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ x & y & z \end{vmatrix} = [\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}]$$

La última igualdad de?ne una notación para el triple producto escalar que evita escribir todo el determinante.

Propiedad 1 Es cíclico, es decir, puede tomarse como primer factor otro vector con tal de que no se altere el orden cíclico (coloque los tres vectores en una circunferencia cuyo recorrido pase primero por $\overline{u}$, luego por $\overline{v}$ y ?nalmente por $\overline{w}$); en símbolos

$$[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}] = [\overline{v}, \overline{w}, \overline{u}] = [\overline{w}, \overline{u}, \overline{v}]$$

Demostración. En este caso

$$[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2csx + cry + btx + 2brz + 2aty + asz$$

$$[\overline{v}, \overline{w}, \overline{u}] = \begin{vmatrix} r & s & t \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2csx + cry + btx + 2brz + 2aty + asz$$

$$[\overline{w}, \overline{u}, \overline{v}] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ r & s & t \end{vmatrix} = 2csx + cry + btx + 2brz + 2aty + asz$$

□

Propiedad 2 Cambia de signo al intercambiar dos de los vectores (note que eso cambia el orden cíclico); por ejemplo,

$$[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}] = -[\overline{v}, \overline{u}, \overline{w}]$$

En este caso

$$-[\overline{v}, \overline{u}, \overline{w}] = -\overline{v} \cdot \overline{u} \times \overline{w} = \overline{v} \cdot \overline{w} \times \overline{u} = [\overline{v}, \overline{w}, \overline{u}] = [\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}]$$

Propiedad 3 Se distribuye sobre la suma, es decir,

$$[\overline{u}_1 + \overline{u}_2, \overline{v}, \overline{w}] = [\overline{u}_1, \overline{v}, \overline{w}] + [\overline{u}_2, \overline{v}, \overline{w}]$$

Demostración. En este caso si $\overline{u}_1 = (u_{1_1}, u_{1_2}, u_{1_3})$ y $\overline{u}_2 = (u_{2_1}, u_{2_2}, u_{2_3})$. Entonces

$$\begin{aligned}
[\overline{u}_1 + \overline{u}_2, \overline{v}, \overline{w}] &= (\overline{u}_1 + \overline{u}_2) \cdot \overline{v} \times \overline{w} \\
&\begin{vmatrix} u_{1_1} + u_{2_1} & u_{1_2} + u_{2_2} & u_{1_3} + u_{2_3} \\ r & s & t \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} u_{1_1} & u_{1_2} & u_{1_3} \\ r & s & t \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{2_1} & u_{2_2} & u_{2_3} \\ r & s & t \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= \overline{u}_1 \cdot \overline{v} \times \overline{w} + \overline{u}_2 \cdot \overline{v} \times \overline{w} \\
&= [\overline{u}_1, \overline{v}, \overline{w}] + [\overline{u}_2, \overline{v}, \overline{w}]
\end{aligned}$$

□

Propiedad 4 Saca escalares, esto es,

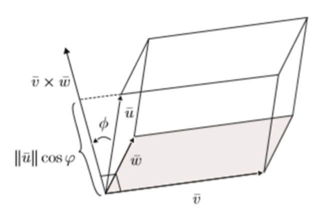
$$[\lambda \overline{u}, \overline{v}, \overline{w}] = \lambda[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}]$$

Demostración. En este caso si $\overline{u}_1 = (u_{1_1}, u_{1_2}, u_{1_3})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}
[\lambda \overline{u}_1, \overline{v}, \overline{w}] &= (\lambda \overline{u}_1) \cdot \overline{v} \times \overline{w} \\
&\begin{vmatrix} \lambda u_{1_1} & \lambda u_{1_2} & \lambda u_{1_3} \\ r & s & t \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} u_{1_1} & u_{1_2} & u_{1_3} \\ r & s & t \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= \lambda(\overline{u}_1 \cdot \overline{v} \times \overline{w}) \\
&= \lambda[\overline{u}_1, \overline{v}, \overline{w}]
\end{aligned}$$

□

Propiedad 5 Expresa el volumen orientado del paralelepípedo $\mathrm{P}(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ de la Figura



Esta propiedad se demuestra tomando en cuenta la interpretación geométrica de los productos anteriores:

$$[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}] = \overline{u} \cdot \overline{v} \times \overline{w} = \|\overline{u}\| \; \|\overline{v} \times \overline{w}\| \cos\ \phi$$

donde

$$\phi = \angle\ (\overline{u}, \overline{v} \times \overline{w})$$

y, como $\overline{v} \times \overline{w}$ es perpendicular a $\overline{v}$ y $\overline{w}$, el número $\|\overline{u}\| \cos\ \phi$ es la altura de $P(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ respecto de la base formada por el paralelogramo determinado por $\overline{u}$ y $\overline{w}$, cuya área es precisamente $\|\overline{u}, \overline{v} \times \overline{w}\|$