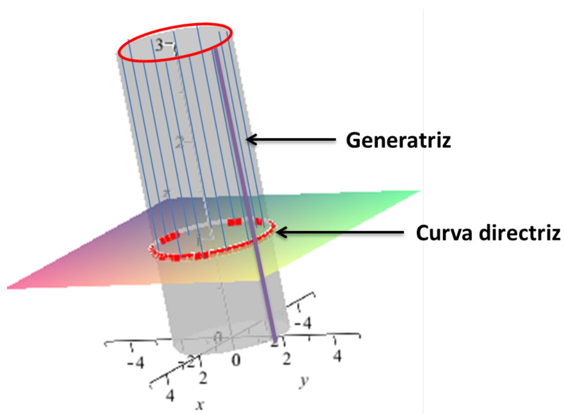
Superficies

Definición 1. *Se llama superficie al conjunto de puntos, y solamente de aquellos puntos, cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de la forma*

$$F(x, y, z) = 0$$

Superficies Cilindricas

Definición 2. *Una superficie cilindrica es la superficie generada por una recta que se mueve paralela a su vector director y pasa por una curva plana llamada directriz, a la recta la llamamos generatriz.*



Cilindros con una dirección dada

Supongamos que la directriz de un cilindro esta en uno de los planos coordenados. Sea M el cilindro cuya directriz esta contenida en el plano XZ cuya ecuación es $q(x, z) = 0$ y sea $\overline{u} = (a, b, c)$ el vector de dirección de las generatrices de M.
Si $P = (x, y, z) \in M$; por definición de cilindro existe $P_0 = (x_0, 0, z_0)$ en la directriz, y se tiene entonces que $P = P_0 + \lambda\overline{u},\ \lambda \in \mathbb{R}$; lo cual da lugar a las siguientes identidades

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\ a \\ y = \lambda\ b \\ z = z_0 + \lambda\ c \end{cases}$$

de donde obtenemos que $\lambda = \dfrac{y}{b}$. Asi que

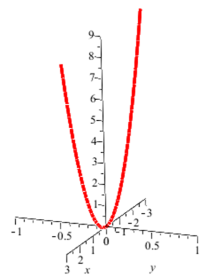
$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{y}{b}\ a \\ z = z_0 + \frac{y}{b}\ c \end{cases} \qquad (1)$$

Para saber que ecuacion cumplen las coordenadas (x, y, z) de P, utilizamos el hecho de que $q(x, z) = 0$ y despejando $x_0,\ z_0$ de (1) y sustituyendo en $q(x, z) = 0$ obtenemos que, las coordenadas de un punto $P \in M$ debe satisfacer

$$F(x, y, z) = q\left(x - \frac{y}{b}\ a, z - \frac{y}{b}\ c\right) = 0$$

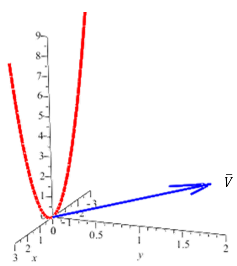
Ejemplo Sea el plano XZ define la directriz como

$$q(x,z) = z - x^2 = 0$$



Y cuyas generatrices tienen vector de direción

$$\overline{u} = 1\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

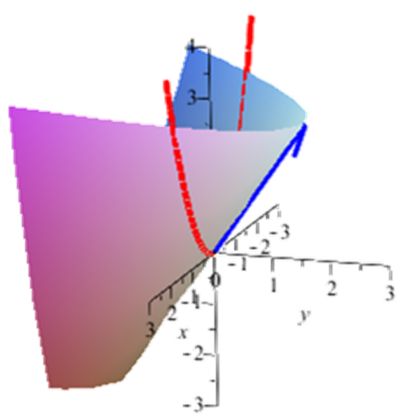


entonces la ecuación que satisfacen las coordenadas de la superficie M es

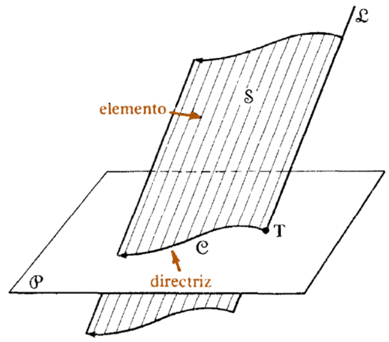
$$F(x,y,z) = q\left(x - \frac{y}{2}, z - \frac{3}{2}y\right) = 0$$

es decir

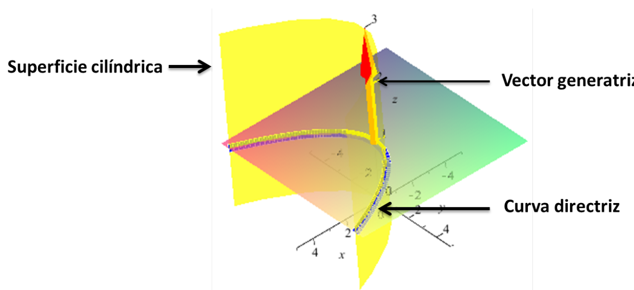
$$z - \frac{3}{2}y - \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 = 0$$



En geometría analítica se considera que un cilindro se extiende indefinidamente en ambos sentidos de un elemento.



Se clasifica a los cilindros según la naturaleza de sus directrices. Por ejemplo si la directriz es una parábola, entonces el cilindro es un cilindro parabólico



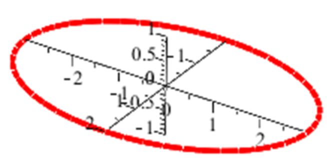
Definición 3. *Llamaremos cilindro recto a aquel que tiene directriz en un plano que es paralelo a los planos coordenados y que además tiene generatriz con vector director paralelo a los ejes coordenados*

La clasificación de las superficies cilíndricas se hace según la naturaleza de su curva directriz

Directriz	Superficie Cilíndrica
Parábola	Cilíndro Parabólico
Elipse	Cilíndro Eliptico
Hipérbola	Cilíndro hiperbólico

Ejemplo Suponga la directriz

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$



En este caso tenemos

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La ecuación del cilindro es

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

z no aparece porque es una variable libre