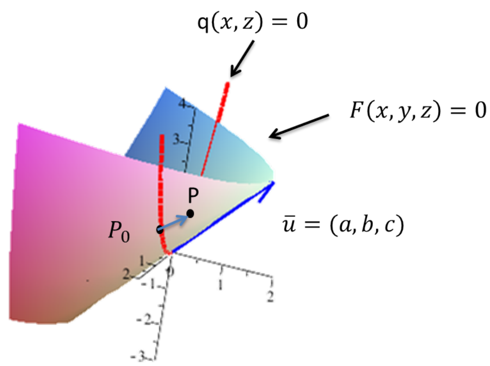


Si $P \in M$ entonces

$$P = P_0 + \lambda \overline{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Se obtuvo

$$x = x_0 + \frac{a}{b}y \;\Rightarrow\; x_0 = x - \frac{a}{b}y$$

$$z = z_0 + \frac{c}{b}y \;\Rightarrow\; z_0 = z - \frac{c}{b}y$$

Y como $(x_0, 0, z_0)$ esta en el plano ZX satisface

$$q(x_0, z_0) = 0$$

es decir

$$q(x - \frac{a}{b}y, z - \frac{c}{b}y) = 0$$

por lo tanto

$$M \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x - \frac{a}{b}y, z - \frac{c}{b}y) = 0\}$$

Para ver que

$$M \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x - \frac{a}{b}y, z - \frac{c}{b}y) = 0\}$$

hacemos

$$x_0 = x - \frac{a}{b}y \;\Rightarrow\; \frac{a}{b}y = x - x_0$$

$$z_0 = z - \frac{c}{b}y \;\Rightarrow\; \frac{a}{b}y = z - z_0$$

se tiene entonces que

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{a}{b}y = \frac{z - z_0}{c}$$

que es la ecuación de la recta que pasa pasa por $(x_0, 0, z_0)$ con vector director $\overline{u} = (a, b, c)$ y que se encuentrsa en el conjunto de rectas generatrices de la superficie M, por lo tanto

$$M \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x - \frac{a}{b}y, z - \frac{c}{b}y) = 0\}$$

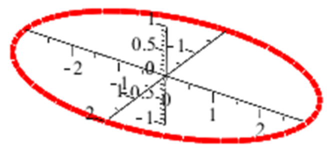
en consecuencia

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x - \frac{a}{b}y, z - \frac{c}{b}y) = 0\}$$

Definición 1. *Llamaremos cilindro recto a aquel que tiene directriz en un plano que es paralelo a los planos coordenados y que además tiene generatriz con vector director paralelo a los ejes coordenados*

Ejemplo Suponga la directriz

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$



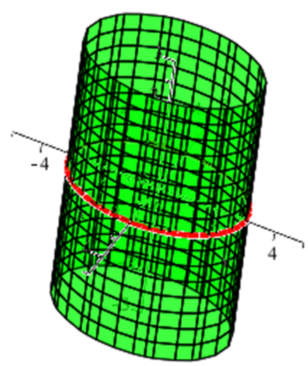
En este caso tenemos

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La ecuación del cilindro es

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

z no aparece porque es una variable libre



La ecuación de un cilindro recto está dado por algunos de los siguientes casos

$$f(x, y) = 0$$
$$f(x, z) = 0$$
$$f(y, z) = 0$$

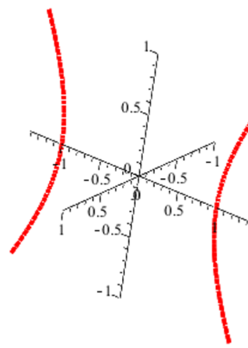
donde la generatriz es paralela al eje que no aparece

Ejemplo Dibuje el cilindro cuya directriz es

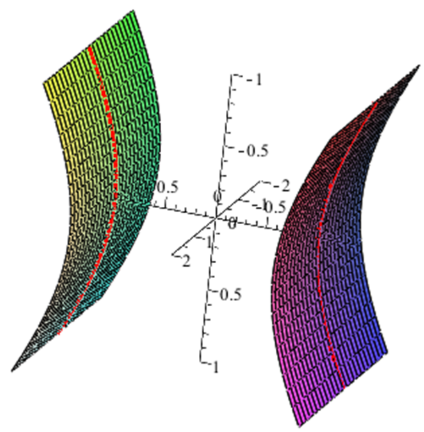
$$y^2 - z^2 - 1 = 0$$

y de una parametrización de el.

Solución La directriz nos da una gráfica paralela al eje X



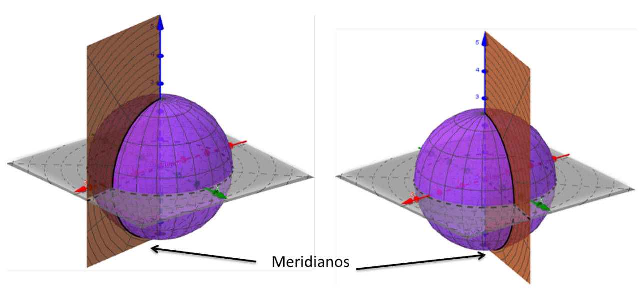
Una parametrización se obtiene haciendo $y = \sec(u), \quad z = \tan(t), \quad x = u$



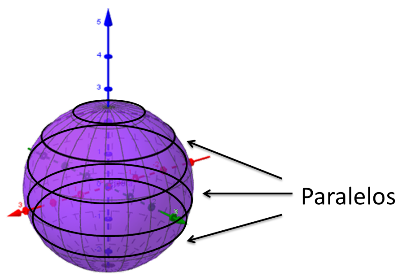
Superficies de Revolución

Definición 2. *Una superficie de revolución es la superficie generada al rotar una curva plana en torno a una recta contenida en ese mismo plano.*

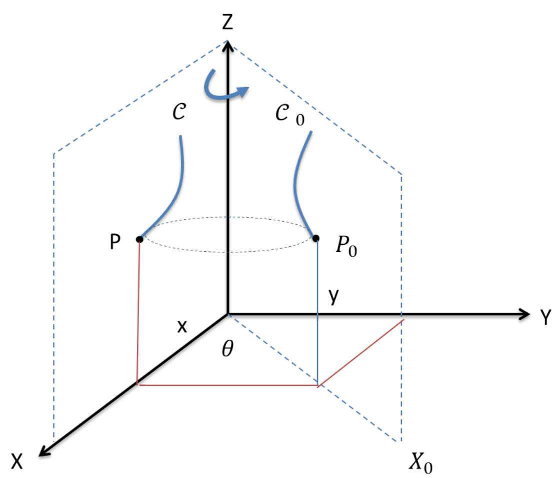
La curva plana se llama generatriz, y la recta fija eje de revolución o, simplemente, eje de la superficie. Las distintas posiciones de la curva generatriz se denominan meridianos de la superficie de revolución,



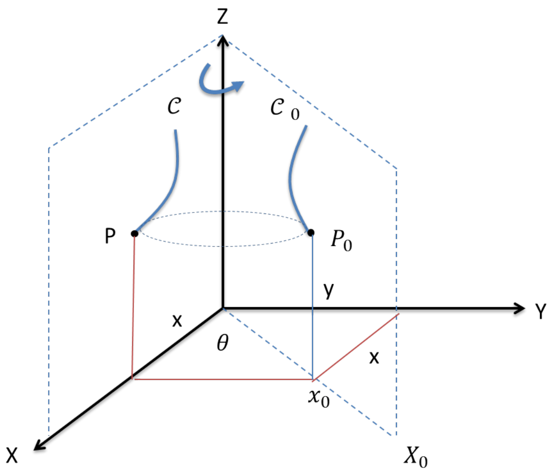
y las circunferencias descritas por cada uno de los puntos de la curva generatriz se denominan paralelos de la superficie de revolución.



Supongamos que una curva generatriz C se encuentra en el plano XZ y que vamos a rotarla en torno al eje Z, para obtener la ecuación de una superficie de revolución, supondremos que la curva C está contenida en la parte del plano coordenado XZ con $x > 0$



Si la ecuación de la curva original es $f(x, z) = 0$, la ecuación de la curva C_0 en el plano ZX_0 es $f(x_0, z)$. El punto P_0, perteneciente a la circunferencia generada por la rotación del punto $P(x, 0, z)$, tiene coordenadas (x_0, z) en el plano X_0Z cuya relación con las originales es la siguiente:
$z_0 = z$ porque la altura respecto al plano XY no cambia,
$|x| = |x_0|$ porque la distancia al eje Z es fija.
Ahora bien si pensamos al punto P_0 como un elemento de $\mathbb{R}^3$, le corresponden coordenadas (x, y, z) donde



$$\sqrt{x^2+y^2}=|x_0|$$

porque $|x_0|$ es la distancia al eje, es decir, el radio de la circunferencia engendrada por el punto $P \in C$. Entonces, para obtener la ecuación que satisface cualquier punto en la superficie de revolución, basta efectuar las sustituciones siguientes en la ecuación $f(x,z)=0$ de la curva original

$$z \to z$$
$$x \to \sqrt{x^2+y^2}$$

pues lo primero se debe a que cuando el punto P rota en torno al eje Z conserva su altura, z, respecto al plano XY , y lo segundo simplemente expresa el radio de la circunferencia generada por P. En general, podemos decir que la variable correspondiente al eje de rotación se conserva, mientras que la otra variable *introduce* a la variable faltante al expresar la distancia al eje de revolución.

Ejemplo Obtenga la ecuación de la superficie que se forma al rotar la curva $z=x^2$ en el plano XZ alrededor del eje Z

Solución En este caso $z=x^2 \;\Rightarrow\; z-x^2=0 \;\Rightarrow\; f(x,z)=z-x^2=0$
si hacemos la sustitución

$$z \to z, \quad x \to \sqrt{x^2+y^2}$$

obtenemos

$$f(\sqrt{x^2+y^2},z)=0 \;\Rightarrow\; z-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=0 \;\Rightarrow\; z=x^2+y^2$$