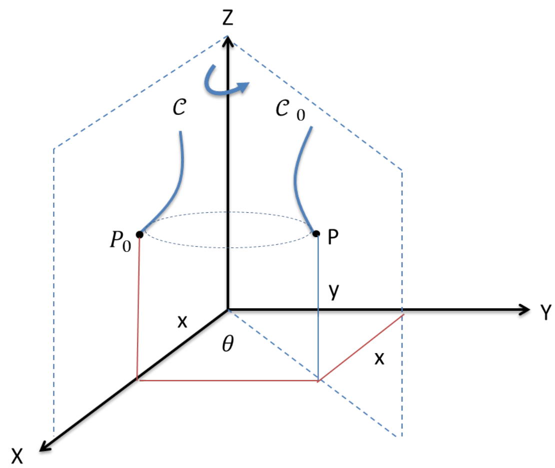
Si $P \in M$ entonces entonces existe $P_0 \in C$ con $P_0 = (x_0, 0, z_0)$ tal que P esta en el paralelo determinado por P_0



La ecuación que debe satisfacer las coordenadas del punto P dependeran del punto P_0 es decir

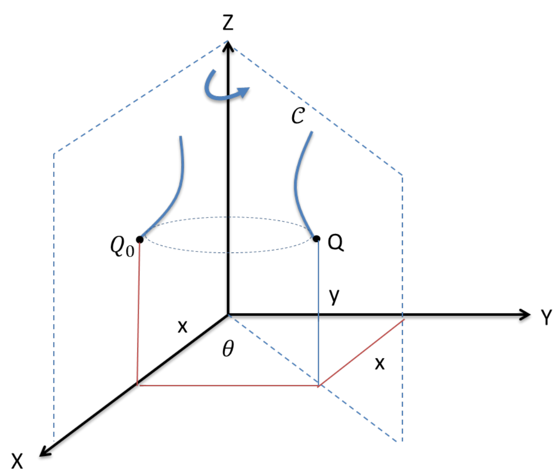
$$P(x, y, z) = q(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

y se tiene entonces que

$$M \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0\}$$

Reciprocamente si $Q \in \mathbb{R}^3$ satisface $q(r, s, t) = 0$ entonces consideramos

$$Q_0 = (\sqrt{x^2 + y^2}, 0, t)$$



entonces Q esta en el paralelo de Q_0, y por tanto $Q \in C$, esto quiere decir que $Q \in M$ en consecuencia

$$M = t\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0\}$$

Si la curva C está contenida en algún otro plano coordenado, las sustituciones son las indicadas a continuación, dependiendo de cuál sea el eje de rotación:
Si $C \subset XY$ y el eje de rotación es el eje X, entonces las sustituciones son

$$x \to x, \quad y \to \sqrt{z^2 + y^2}$$

Si $C \subset XY$ y el eje de rotación es el eje Y, entonces las sustituciones son

$$y \to y, \quad z \to \sqrt{x^2 + z^2}$$

Si $C \subset YZ$ y el eje de rotación es el eje Y, entonces las sustituciones son

$$y \to y, \quad z \to \sqrt{z^2 + x^2}$$

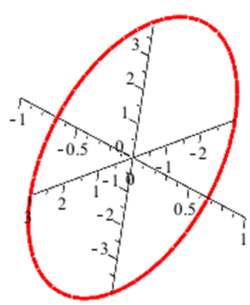
Si $C \subset YZ$ y el eje de rotación es el eje Z, entonces las sustituciones son

$$z \to z, \quad y \to \sqrt{y^2 + x^2}$$

Elipsoides

Consideremos una elipse en posición canónica en el plano coordenado XZ; la ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



y podemos rotarla en torno al eje X. Aplicando la sustitución $x \to x, \quad z \to \sqrt{z^2 + y^2}$ obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{z^2 + y^2})^2}{b^2} = 1$$

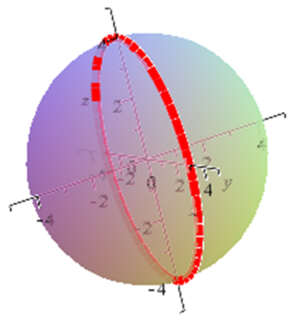
que puede simplificarse así:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2 + y^2}{b^2} = 1$$

o mejor,

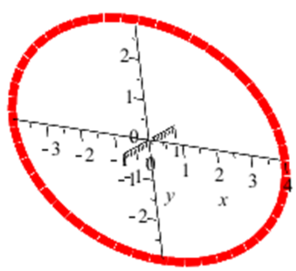
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Obsérvese que dos denominadores son iguales; pues cuando la elipse se ha girado un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ en torno al eje X queda ubicada en el plano XY, o bien a que el corte del elipsoide con el plano con el plano $z = 0$ es una elipse congruente con la original. Este elipsoide tiene el aspecto de una sandia, con un eje de simetría largo largo y los restantes perpendiculares al anterior



Consideremos una elipse en posición canónica en el plano coordenado XZ; la ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



y podemos rotarla en torno al eje Z. Aplicando la sustitución $z \to z, \quad x \to \sqrt{x^2 + y^2}$ obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{z^2 + y^2})^2}{b^2} = 1$$

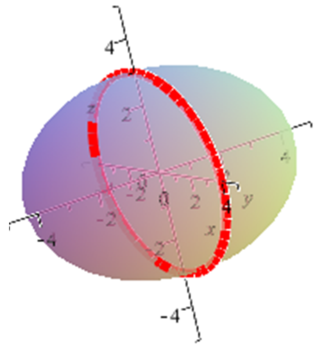
que puede simplificarse así:

$$\frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

o mejor,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

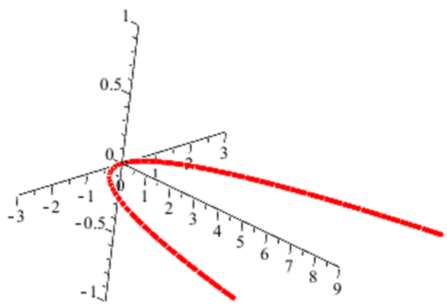
Observamos que un vértice de la elipse generatriz da lugar a una circunferencia, mientras que el eje menor no se mueve



Paraboloide

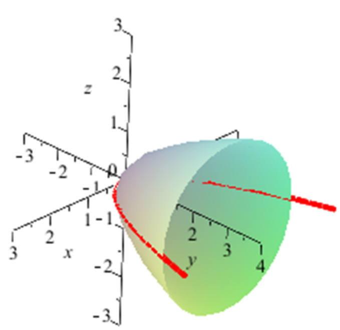
Consideremos ahora una parábola contenida en el plano en plano XY y con ecuación

$$x^2 = 4py$$

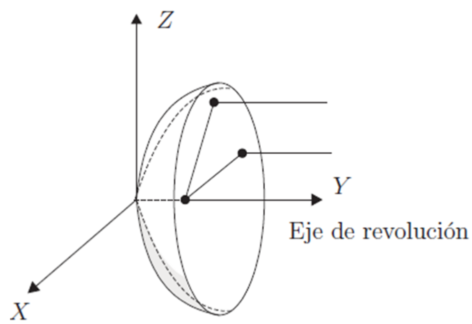


cuyo eje de simetría es el eje Y; usando la sustitución $y \to y, \quad x \to \sqrt{x^2+z^2}$ se obtiene

$$x^2 + z^2 = 4py$$

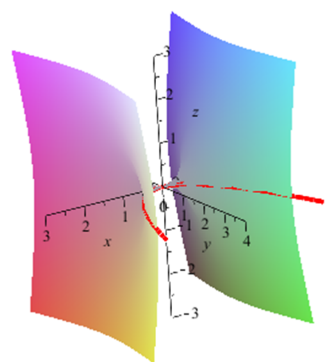


El aspecto del paraboloide de revolución es precisamente el de una antena parabólica; el foco de la parábola original es el foco de todas las parábolas meridianas y en él se concentran los rayos reflejados en el paraboloide provenientes de un satelite artificial



Si rotamos la parábola en torno al eje conjugado, que no es un eje de simetría, se forma una superficie parecida a un cojincircular, es decir haciendo la sustitución $x \to x, \quad y \to \sqrt{z^2+y^2}$ obtenemos

$$x^2 = 4p\sqrt{z^2+y^2}$$

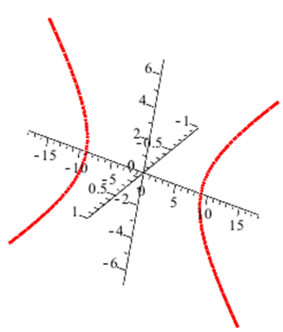


Hiperboloide

Consideremos ahora una hipérbola en posición canónica en el plano YZ. Si la ecuación es

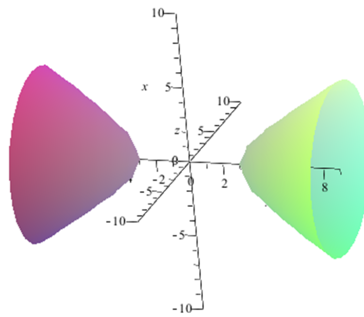
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

entonces el eje focal es el eje Y y el eje conjugado el eje Z.



como ambos son ejes de simetría de la hipérbola, la rotación en torno al eje Y con la sustitución $y \to y, \quad z \to \sqrt{z^2 + x^2}$ da lugar a la ecuación

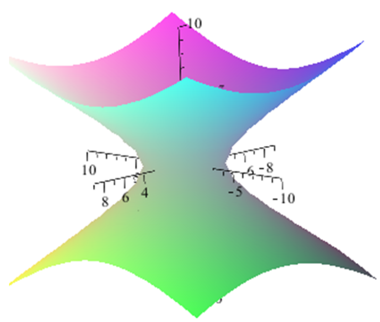
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



esta superficie se denomina hiperboloide de dos mantos.,
Si ahora utilizamos como eje de rotación el eje Z, la sustitución es $z \to z, \quad y \to \sqrt{y^2 + x^2}$ y la ecuación de la superficie es

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

porque la variable que cambia es la variable y



Este hiperboloide consta de una sola pieza, porque una rama de la hipérbola alcanza a la otra despues de dar media vuelta, por eso se llama hiperboloide de una hoja o de un manto