Tomemos ahora cónicas singulares: un punto, una recta doble y dos rectas que se cortan, a las que deberemos agregar dos rectas paralelas para completar la lista de curvas cuadráticas. Las ecuaciones correspondientes son:

$$x^2 + y^2 = 0, \quad z^2 = 0, \quad z^2 - x^2 = 0, \quad y^2 = 9$$

En el caso de la primera ecuación ubicamos la curva en el plano XY, la sustitución $x \to x, \quad y \to \sqrt{y^2 + z^2}$ al girar en torno a X, nos da

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

que corresponde al punto $(0, 0, 0)$
En el caso de la primera ecuación ubicamos la curva en el plano XY, la sustitución $y \to y, \quad x \to \sqrt{x^2 + z^2}$ al girar en torno al eje Y nos da

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

que corresponde al punto $(0, 0, 0)$
En el caso de la segunda ecuación ubicamos la curva en el plano YZ, la sustitución $y \to y, \quad z \to \sqrt{z^2 + x^2}$ al girar en torno al eje Y nos da

$$x^2 + z^2 = 0$$

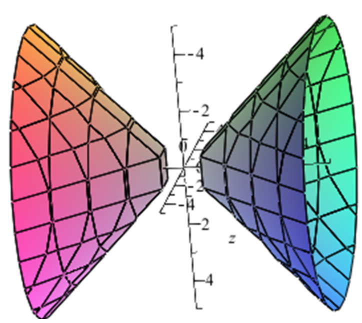
que corresponde a una recta, el eje Y
En el caso de la segunda ecuación ubicamos la curva en el plano YZ, la sustitución $z \to z, \quad y \to \sqrt{y^2 + x^2}$ al girar en torno al eje Z nos da

$$z^2 = 0$$

que corresponde al plano XY
En el caso de la tercera ecuación ubicamos la curva en el plano ZX, la sustitución $x \to x, \quad z \to \sqrt{z^2 + y^2}$ al girar en torno al eje X nos da

$$y^2 + z^2 - x^2 = 0$$

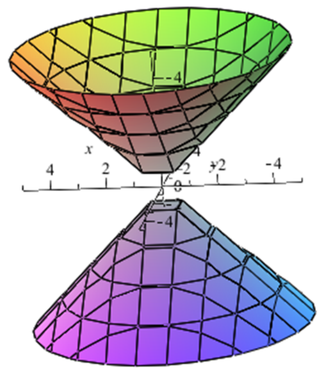
que corresponde a un cono



En el caso de la tercera ecuación ubicamos la curva en el plano ZX, la sustitución $z \to z, \quad x \to \sqrt{x^2 + y^2}$ al girar en torno al eje Z nos da

$$y^2 + z^2 - x^2 = 0$$

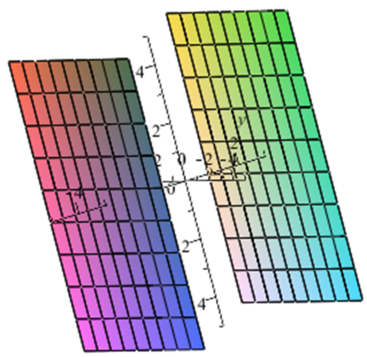
que corresponde a un cono



En el caso de la cuarta ecuación ubicamos la curva en el plano YZ, la sustitución $y \to y, \quad z \to \sqrt{z^2 + x^2}$ al girar en torno al eje Y nos da

$$y^2 = 9,$$

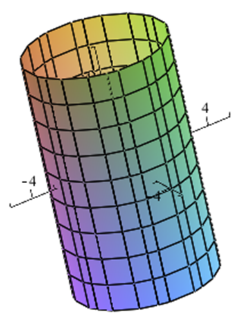
que corresponde a dos planos paralelos



En el caso de la cuarta ecuación ubicamos la curva en el plano YZ, la sustitución $z \to z, \quad y \to \sqrt{y^2 + x^2}$ al girar en torno al eje Z nos da

$$x^2 + y^2 = 9,$$

que corresponde a un cilíndro



Alguna de las ecuaciones de las superficies que hemos obtenido son:

1. Elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
2. Hiperboloide de dos mantos $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$
3. Hiperboloide de un manto $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$
4. Paraboloide Elíptico $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$
5. Paraboloide Hiperbólico $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$
6. Cilindro Elíptico $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
7. Cilindro Hiperbólico $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$
8. Cilindro Parabólico $x^2=4py$
9. Cono Elíptico $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$
10. Dos Planos qu se Cortan $x^2-2y^2=0$
11. Dos Planos Paralelos $x^2-1=0$
12. Uu plano doble $x^2=0$
13. Una recta $x^2+y^2=0$
14. Un punto $x^2+y^2+z^2=0$
15. El conjunto vacio $x^2+y^2+z^2+1=0$

Estas ecuaciones cuadráticas de los lugares geométricos no tienen términos mixtos y son en tres variables

La ecuación de 2do grado sin términos mixtos

Una ecuación de segundo grado en tres variables sin términos mixtos tiene la forma

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Gx+Hy+Iz+J=0$$

Vamos a revisar algunos casos de los valores de los coeficientes de los términos cuadráticos

Ejemplo Suponga que $A, B, C \neq 0$ en este caso revisaremos $A = B = C = 1$ se tiene entonces

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

completanto cuadrados se tiene

$$x^2 + Gx + \left(\frac{G}{2}\right)^2 + y^2 + Hy + \left(\frac{H}{2}\right)^2 + z^2 + Iz + \left(\frac{I}{2}\right)^2 + J - \left(\frac{G}{2}\right)^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2 - \left(\frac{I}{2}\right)^2 = 0$$

llamamos

$$j' = J - \left(\frac{G}{2}\right)^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2 - \left(\frac{I}{2}\right)^2$$

y tenemos entonces

$$\left(x + \frac{G}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{H}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{I}{2}\right)^2 + j' = 0$$

Si $j' = 0$ la ecuación representa un punto $(-G, -H, -K)$
Si $j' < 0$ la ecuación representa una esfera con centro $(-G, -H, -I)$
Si $j' > 0$ la ecuación representa el conjunto vacio

Ejemplo Suponga que $A, B, C \neq 0$ en este caso revisaremos $A = 1,\ B = 2,\ C = 3$ se tiene entonces

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

completanto cuadrados se tiene

$$x^2 + Gx + \left(\frac{G}{2}\right)^2 + 2\left(y^2 + \frac{Hy}{4} + \left(\frac{H}{4}\right)^2\right) + 3\left(z^2 + \frac{Iz}{6} + \left(\frac{I}{6}\right)^2\right) + J - \left(\frac{G}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{H}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{I}{6}\right)^2 = 0$$

llamamos

$$j' = J - \left(\frac{G}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{H}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{I}{6}\right)^2$$

y tenemos entonces

$$\left(x + \frac{G}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{H}{4}\right)^2 + 3\left(z + \frac{I}{6}\right)^2 + j' = 0$$

Si $j' = 0$ la ecuación representa un punto $\left(\frac{-G}{2}, \frac{-H}{4}, \frac{-I}{6}\right)$
Si $j' < 0$ la ecuación representa un elipsoide

$$\frac{\left(x + \frac{G}{2}\right)^2}{-j'} + \frac{\left(y + \frac{H}{4}\right)^2}{\frac{-j'}{2}} + \frac{\left(z + \frac{I}{6}\right)^2}{\frac{-j'}{3}} = 1$$

con centro $\left(\frac{-G}{2}, \frac{-H}{4}, \frac{-I}{6}\right)$
Si $j' > 0$ la ecuación representa el conjunto vacio