Una ecuación de segundo grado en tres variables sin términos mixtos tiene la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Vamos a revisar algunos casos de los valores de los coeficientes de los términos cuadráticos

Caso 1: Solo uno de los coeficientes cuadráticos es diferente de cero.

En éste caso consideramos $A \neq 0$ y $B = C = 0$, que produce la ecuación

$$Ax^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Donde si $G \neq 0$, entonces

$$Ax^2 + \frac{G}{A}x + \left(\frac{G}{A}\right)^2 - \left(\frac{G}{A}\right)^2 + Hy + Iz * J = 0$$

$$\left(x + \frac{G}{2A}\right)^2 + Hy + Iz + \left(J - \frac{G^2}{4A}\right) = 0$$

donde $\left(J - \frac{G^2}{4A}\right) \in \mathbb{R}$ y la interpretación geométrica del término $\left(x + \frac{G}{2A}\right)$ significa una traslación sobre el eje X de la superficie que determina

$$\left(x + \frac{G}{2A}\right)^2 + Hy + Iz + \left(J - \frac{G^2}{4A}\right) = 0$$

Si $H \neq 0$ y $\left(J - \frac{G^2}{4A}\right) \neq 0$, entonces

$$Hy + J' = H\left(y + \frac{J'}{H}\right)$$

y la ecuación se escribe

$$\left(x + \frac{G}{2A}\right)^2 + H\left(y + \frac{J'}{H}\right) + Iz = 0$$

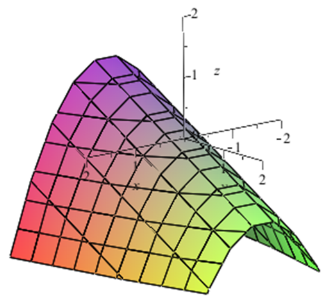
donde ahora la interpretación geométrica del término $\left(y + \frac{J'}{H}\right)$ significa una traslación sobre Y, entonces si $A \neq 0$, $H \neq 0$ y $J \neq 0$ será suficiente analizar qué tipo de superficie deterrmina una ecuación de la forma

$$x^2 + Hy + Iz = 0$$

Ejemplo Según el análisis anterior tenemos la siguiente ecuación $A \neq 0$ H, $I \neq 0$

$$3x^2 + 2y + 4z = 0$$

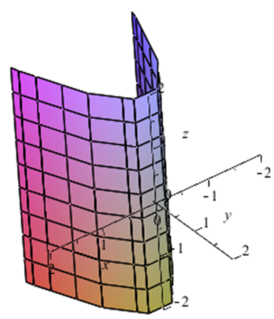
representa un cilíndro parabólico



Ejemplo Según el análisis anterior tenemos la siguiente ecuación $A \neq 0$, $H \neq 0$

$$3x^2 + 2y = 0$$

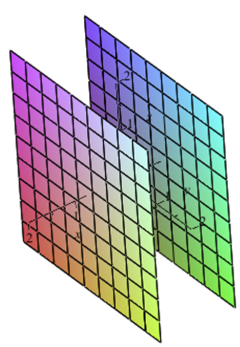
representa un cilíndro parabólico



Ejemplo Según el análisis anterior tenemos la siguiente ecuación $A \neq 0$, $J \neq 0$

$$3x^2 - 2 = 0$$

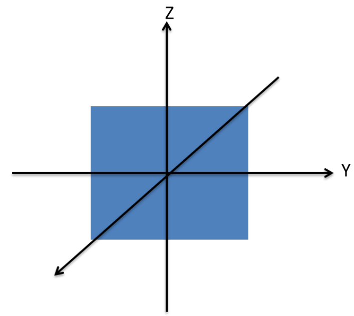
representa un par de planos paralelos



Ejemplo Según el análisis anterior tenemos la siguiente ecuación

$$3x^2 = 0$$

representa un plano YZ



Caso 2: ***Solo dos de los coeficientes cuadráticos son diferentes de cero.***
Dada la ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Consideraremos $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$, que produce la ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Si tomamos $G = 0$, $H = 0$, $I = 0$, $J > 0$, obtenemos

$$Ax^2 + By^2 + J = 0 \ \Rightarrow \ \frac{x^2}{\left(\frac{-J}{A}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{-J}{B}\right)} = 1$$

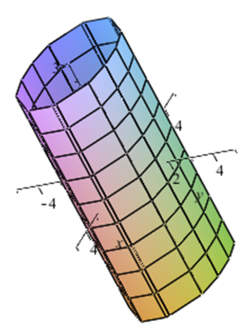
vamos a analizar

$$\frac{J}{A} < 0 \ \ y \ \ \frac{J}{B} < 0$$

considerando $B > 0$, $A > 0$, $J < 0$ la ecuación se puede escribir

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{-J}{A}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{-J}{B}}\right)^2} = 1$$

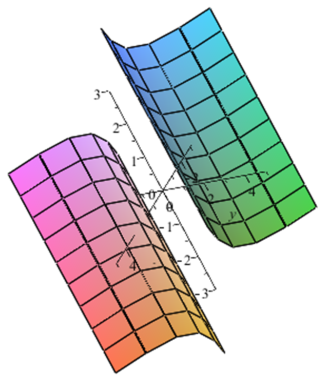
esta superficie corresponde a un cilindro elíptico



considerando $B > 0$, $A < 0$, $J > 0$ la ecuación se puede escribir

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{-J}{A}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{J}{B}}\right)^2} = 1$$

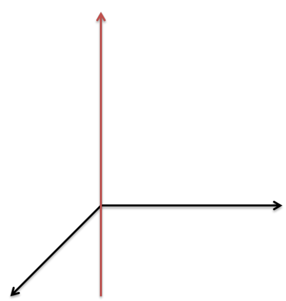
esta superficie corresponde a un cilindro hiperbólico



Para la ecuación

$$Ax^2 + By^2 = 0$$

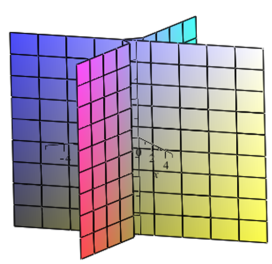
considerando $A > 0$, $B > 0$ la ecuación representa un cilindro elíptico degenerado si $A \neq B$ (Eje Z)



considerando $A > 0$, $B < 0$ la ecuación se puede escribir

$$(\sqrt{A}x + \sqrt{-B}y)(\sqrt{A}x - \sqrt{-B}y) = 0$$

esta superficie corresponde a dos planos que se cortan



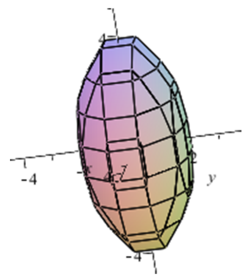
Caso 3: Los tres coeficientes cuadráticos son diferentes de cero.
En este caso se tiene la ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$$

donde $ACBJ \neq 0$
considerando $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ y $J < 0$ se tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{-J}{A}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{-J}{B}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\sqrt{\frac{-J}{C}}\right)^2} = 1$$

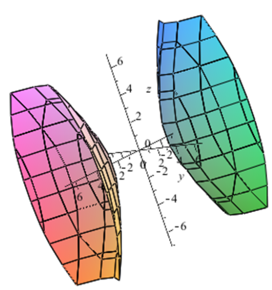
esta superficie corresponde a un elipsoide



considerando $A > 0$, $B < 0$, $C < 0$ y $J < 0$ se tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{-J}{A}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{J}{B}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(\sqrt{\frac{J}{C}}\right)^2} = 1$$

esta superficie corresponde a un hiperbolóide de dos mantos



considerando $A > 0$, $B > 0$, $C < 0$ y $J < 0$ se tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{-J}{A}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{-J}{B}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(\sqrt{\frac{J}{C}}\right)^2} = 1$$

esta superficie corresponde a un hiperbolóide de un manto