Eliminación de los términos mixtos de la ecuación general de 2do grado en dos variables

Una ecuación de segundo grado en dos variables se puede expresar

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde el término en xy indica una rotación de la superficie que representa dicha ecuación.
La ecuación puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

Por otro lado una rotación $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se representa

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) = (x', y')$$

y en forma matricial

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

como la matriz asociada a una rotación R_θ tiene asociada una matriz de rotación inversa $R_{-\theta}$ dada por

$$R_{-\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

En la expresión

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Multiplicando por la izquierda ambos lados por la matriz inversa $R_{-\theta}$ se tiene

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

de manera que como vector columna se escribe

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

y como vector renglón se puede escribir

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ahora bien regresando a la ecuación en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

al desarrollar la parte azul se tiene un término mixto que se quiere eliminar por tanto primero usamos la expresión en verde anterior y obtenemos

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x' \quad y')\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

en segundo lugar se requiere que $B = 0$ y por tanto deben existir valores reales A' y C' tales que

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}$$

Multiplicando por la izquierda ambos miembros por la matriz inversa de la primera de la izquierda, obtenemos

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'\cos\theta \\ -A'\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C'\operatorname{sen}\theta \\ C'\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = C'\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Esto se puede interpretar así: ***De existir una rotación R_θ que elimine los términos mixtos de una ecuación de segundo grado en dos variables, los vectores columna de la rotación inversa $R_{-\theta}$, deben ser vectores propios de la transformación lineal inducida por la matriz de la parte cuadrática***

$$\underbrace{(x \quad y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{(x' \quad y')\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}} + \underbrace{(D \quad E)(x \quad y)}_{(D \quad E)\begin{pmatrix} vx_{\lambda_1} & vx_{\lambda_2} \\ vy_{\lambda_1} & vy_{\lambda_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}} + F = 0$$

Vamos a ver que la transformación lineal inducida por la matriz de la parte cuadrática simpre tiene dos valores propios reales, en este caso

$$p(\lambda) = \det\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A-C)\lambda + AC - B^2$$

El discriminante de esta ecuación es:

$$\begin{aligned} \triangle &= (A+C)^2 - 4(AC - B^2) \\ &= A^2 + 2AC + C^2 - 4AC + 4B^2 \\ &= (A-C)^2 + 4B^2 \end{aligned}$$

esta expresión siempre es mayor a cero por lo tanto los valores propios son reales y en consecuencia los vectores propios siempre existen y por tanto es posible encontrar una rotación adecuada que elimine términos mixtos de una ecuación de segundo grado en dos variables.

Ejemplo Elimine los términos mixtos de la ecuación

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16x + 16y + 8 = 0$$

Solución En este caso $A = 5$, $2B = -6 \;\Rightarrow\; B = -3$ y $C = 5$ por lo que la forma matricial de esta ecuación es

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-16 \quad 16)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 8 = 0$$

Según lo siguiente: **los vectores columna de la rotación inversa $R_{-\theta}$, deben ser vectores propios de la transformación lineal inducida por la matriz de la parte cuadrática**

1. Vamos a hallar los vectores propios de la matriz de los términos cuadráticos, en este caso

$$p(\lambda) = \det\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 16$$

cuyas raíces son $\lambda = 2$ y $\lambda = 8$
Para $\lambda = 2$ se tiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5-2 & -3 \\ -3 & 5-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{matrix} 3x - 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{matrix} \end{aligned}$$

cuya solución es $x = y$ sobre esta dirección $\theta = \frac{\pi}{4}$ y la pendiente es 1
Para $\lambda = 8$ se tiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5-8 & -3 \\ -3 & 5-8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{matrix} -3x - 3y = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{matrix} \end{aligned}$$

cuya solución es $x = -y$ sobre esta dirección $\theta = -\frac{\pi}{4}$ y la pendiente es -1
Se tiene entonces que la matriz correspondiente a la rotación $R_{-\theta}$ tiene como columnas a los vectores $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ debido al valor propio 2 y $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ debido al valor propio 8.
Es decir

$$\underbrace{(x \quad y)\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{(x' \quad y')\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}} + \underbrace{(-16 \quad 16)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{(-16 \quad 16)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}} + 8 = 0$$

esto nos queda
$$2x'^2 + 8y'^2 + 16\sqrt{2}y' + 8 = 0$$

Eliminación de los términos mixtos de la ecuación general de 2do grado en tres variables

Una ecuación de segundo grado en tres variables se puede expresar
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$
donde el término en $xy,\ xz,\ yz$ indican una rotación de la superficie que representa dicha ecuación.
La ecuación puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera
$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & H & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + J = 0$$
Se procede de manera analoga al caso en dos variables, si (x', y', z') son las coordenadas del punto P' resultante de haber rotado al punto P de coordenadas (x, y, z), entonces (x, y, z) resultan de aplicar el inverso de esa rotación a (x', y', z'). La matriz de una rotación es ortogonal y, por tanto, su inversa es su transpuesta y las sustituciones que se deben de efectuar son
$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$
Ahora bien regresando a la ecuación en forma matricial
$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & H & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + J = 0$$
al desarrollar la parte azul se tienen términos mixto que se quieren eliminar por tanto se plantea la igualdad dsiguiente
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$
Al multiplicar ambos miembros por la izquierda por la matriz inversa de la primera (que por ser ortogonal, es la tranpuesta) y comparar los correspondientes vectores columna de ambos miembros, obtenemos las igualdades
$$\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

que expresan el hecho de que los vectores columna de la rotación inversa de la que estamos buscando deben ser vectores propios de la transformación lineal inducida por la matriz de la parte cuadrática. Entonces, la posibilidad de eliminar términos mixtos de una ecuación de segundo grado en tres variables equivale a que el polinomio característico de una matriz simétrica de orden tres tenga siempre raíces reales. (la demostración se omite)

Ejemplo Elimine los términos mixtos de la ecuación

$$5x^2 + 8y^2 + z^2 - 2xz - \sqrt{2}x - \sqrt{2}z = 0$$

cuya forma matricial es

$$(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (-\sqrt{2} \quad 0 \quad -\sqrt{2})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 0 = 0$$

Solución En este caso $A = 1$, $B = 8$, $2E = -2 \;\Rightarrow\; E = -1$, $2D = 0 \;\Rightarrow\; D = 0$ y $2F = 0 \;\Rightarrow\; F = 0$ por lo que la matriz de la parte cuadrática es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 8-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(8-\lambda^2) - (8-\lambda)$$

$$= (8-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1]$$
$$= (8-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda]$$

Las raíces de este polinomio son $0, 2$ y 8, y los sistemas que permiten obtener los vectores característicos correspondientes se obtienen al sustituir λ por uno por uno de estos valores en las tres ecuaciones siguientes

$$\begin{gathered} (1-\lambda)x + 0y + (-1)z = 0 \\ 0x + (8-\lambda)y + 0z = 0 \\ (-1)x + 0y + (1-\lambda)z = 0 \end{gathered}$$

Para $\lambda = 0$ el sistema es

$$\begin{gathered} x - z = 0 \\ 8y = 0 \\ -x + z = 0 \end{gathered}$$

que implica que $x = z$ y $y = 0$. Entonces, un vector característico unitario es

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Para $\lambda = 2$ el sistema es

$$\begin{aligned} -x - z &= 0 \\ 6y &= 0 \\ -x - z &= 0 \end{aligned}$$

que implica que $x = -z$ y $y = 0$. Entonces, un vector característico unitario es

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Para $\lambda = 8$ el sistema es

$$\begin{aligned} -7x - z &= 0 \\ 0y &= 0 \\ -x - 7z &= 0 \end{aligned}$$

que implica que $x = z = 0$ y y es libre. Entonces, un vector característico unitario es

$$(0, 1, 0)$$

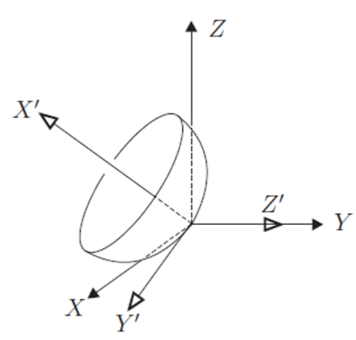
Debemos hacer ahora las sustituciones

$$\underbrace{(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 8 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{(x' \quad y' \quad z')\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}} + \underbrace{(-\sqrt{2} \quad 0 \quad -\sqrt{2})\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{(-\sqrt{2} \quad 0 \quad -\sqrt{2})\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}} +0 = 0$$

así la forma canónica de la cuádrica es

$$2y'^2 + 8z'^2 - 2x' = 0$$

y podemos identificarla como un paraboloide eliptico.
Para dibujar el paraboloide, primero trazamos los ejes X', Y', Z' en las direcciones de los vectores propios y con respecto a esos ejes dibujamos el paraboloide eliptico.



Si el orden de los valores propios hubiera sido otro, por ejemplo 8, 0 y 2, la ecuación cambiaría

$$8x'^2 + 2z'^2 - 2y' = 0$$

en ese caso se dibuja el paraboloide respecto a los ejes X', Y', Z' con direcciones

$$(0,1,0), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

respectivamente y el paraboloide sería exactamente el mismo.