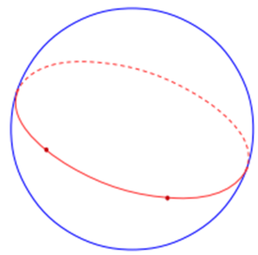
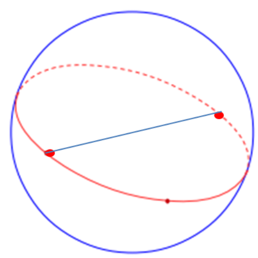
La Geometría de la Esfera

Definición 1. *Se define a la esfera que denotamos S^2 como el conjunto*

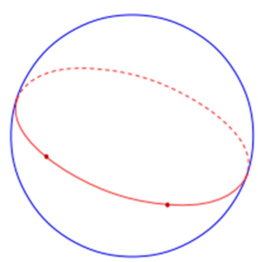
$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\| = 1\}$$



Definición 2. *A los puntos de la esfera que son diametralmente opuestos se les llama antípodas, cada punto de la esfera tiene un antípoda*



En la esfera no podemos movernos por líneas rectas, en cambio podemos usar las trayectoria mas directas posibles, llamadas **geodésicas**, que son los círculos de radio máximo obtenidos al intersectar la esfera con planos que pasan por su centro.



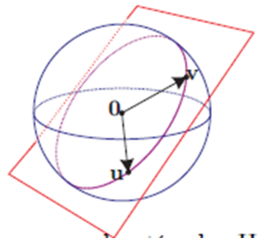
Definición 3. *Una línea en la esfera, o una línea esférica, es la intersección de S^2 con un plano que pasa por el origen.*

Proposición 1. *Por dos puntos $u, v \in S^2$ siempre pasa una línea esférica*

Demostración. Sean $u, v \in S^2$ tal que U,v no son paralelos, por lo que u,v generan un plano por el origen por lo que

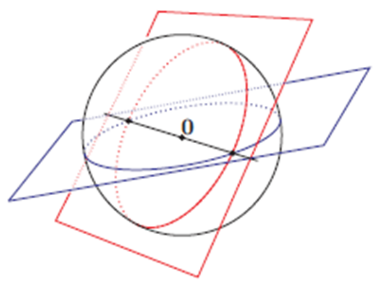
$$\xi =< u, v > \bigcap S^2$$

es la línea esférica que contiene a ambos.

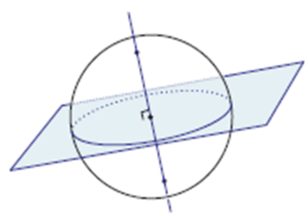


Y si u,v son paralelos entonces estan contenidos en una línea que pasa por el origen y al ser de tamaño 1 o bien son iguales o bien son antípodas, es decir $u = -v$. $\square$

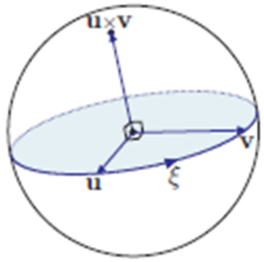
Esta condición es muy parecida a la de la geometría clásica del plano euclidiano donde por cualquier par de puntos pasa una recta. Pero a diferencia del plano euclidiano, en la esfera no hay paralelismo. Cualquier par de líneas esféricas se intersectan en una pareja de puntos antípodas. Como los planos que las definen pasan por el origen, entonces se intersectan en una línea por él, que corta la esfera en una pareja de antípodas



Definición 4. ***Polaridad***. *Decimos que una línea esférica y un par de puntos antípodas son polares, si el plano por el origen y la línea que pasa por lo punto antípodas son ortogonales*



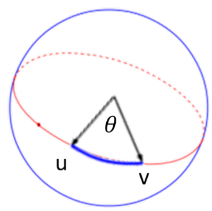
Si tomamos en cuenta la orientación en $\mathbb{R}^3$ entonces a una línea esférica ξ, le podemos dar dos orientaciones, es decir maneras preferentes de viajar en ella. Si denotamos $\overrightarrow{\xi}$ a la línea esférica ξ, orientada, entonces al tomar un punto $u \in \xi$ y viajamos en la orientación de $\overrightarrow{\xi}$ un cuarto de vuelta para llega a un punto v, y luego tomamos $u \times v$ se tiene entonces que $u \times v \in S^2$ u esto no depende de u.



y a cada punto de S^2 le corresponde una línea esférica orientada, llamada su polar.

Definición 5. ***Distancia*** *Sean $u, v \in S^2$. Definimos la distancia de u a v como*

$$d_{S^2}(u,v) = \angle(u,v) \quad (\acute{a}gulo)$$



Proposición 2. *Sean $u, v \in S^2$ entonces*

$$d_{S^2}(u,v) = \arccos(u \cdot v)$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \|u\| \ \|v\| \ \cos(\angle(u,v)) \\ \Rightarrow \ \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} &= \cos(\angle(u,v)) \\ \underbrace{\Rightarrow}_{\|u\|=\|v\|=1} \quad u \cdot v &= \cos(\angle(u,v)) \\ \Rightarrow \ \arccos(u \cdot v) &= \angle(u,v) \end{aligned}$$

□

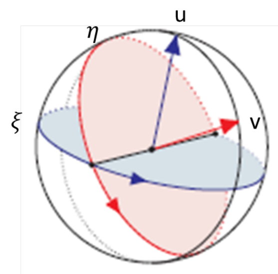
Como el arcocoseno toma valores en el intervalo $[0, \pi]$, se tiene entonces que, para todo u,v en S^2,

$$0 \leq d_{S^2}(u,v) \leq \pi$$

Definición 6. *Sean ξ, η líneas esféricas. Definimos el ángulo entre ξ, η como*

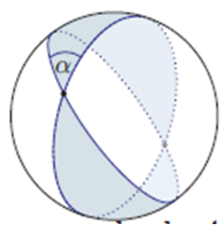
$$\angle(\xi, \eta) = d_{S^2}(u,v)$$

con u,v polares de ξ, η respectivamente

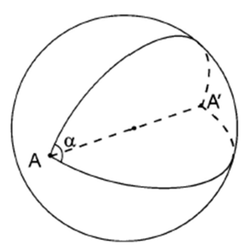


Áreas y Triángulos

En la esfera, los ángulos también miden área. Si tomamos un ángulo entre dos rectas junto con su opuesto por el vértice, obtenemos dos gajos, llamémoslo un bigajo, determinado por el ángulo α entre las rectas.



Teorema 1. *Un sector esférico cuyos estremos son los puntos antípodas AA' descrito en la figura con una ángulo α entre sus segementos esféricos, tiene un área igual a $2\alpha R^2$, donde R es el radio de la esfera*



Demostración. Claramente el área del sector (que denotamos A_α) es directamente proporcional al ángulo α.
Si $\alpha = 2\pi$ el sector tiene área igual al área de la esfera, es decir

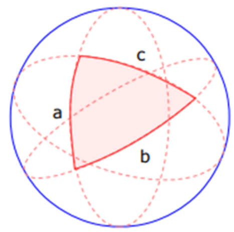
$$A_{2\pi} = 4\pi R^2$$

por la proporcionalidad se tiene

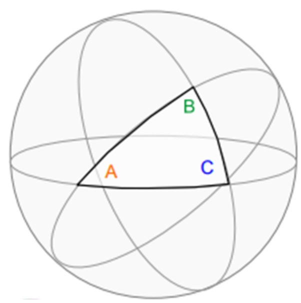
$$A_\alpha = 2\alpha R^2$$

□

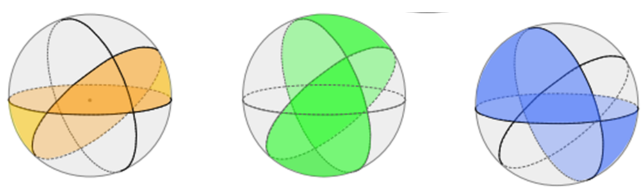
Triángulos Esféricos Los triángulos esféricos se forman uniendo 3 puntos no antípodas por las geodésicas mas cortas entre ellos, que son arcos de círculos máximos de longitud menor que π



Teorema 2. *En un triángulo esférico la suma de los ángulos internos suman $\pi +$Área $\triangle$*



Demostración. Tenemos que la esfera se divide en tres bigajos como se ve en la figura



donde

$$A_{gA} = 4AR^2$$
$$A_{gB} = 4BR^2$$
$$A_{gC} = 4\alpha R^2$$

Los bigajos cubren el área del triángulo 2 veces y de su triángulo antípoda 2 veces, se tiene entonces

$$A_{gA} + A_{gB} + A_{gC} = 4\pi R^2 + 4A(T)$$

por lo tanto

$$4A(T) = 4AR^2 + 4BR^2 + 4CR^2 - 4\pi R^2$$
$$\Rightarrow \; A(T) = R^2(A + B + C - \pi)$$

como $A(T) > 0$ entonces debe ocurrir que

$$A + B + C > \pi$$

ahora bien si $R = 1$ se tiene entonces

$$A(T) + \pi = A + B + C$$

$\square$