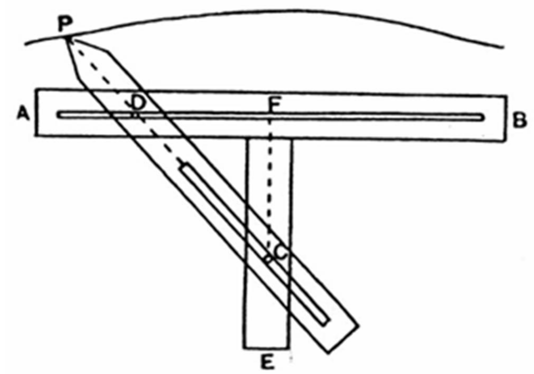
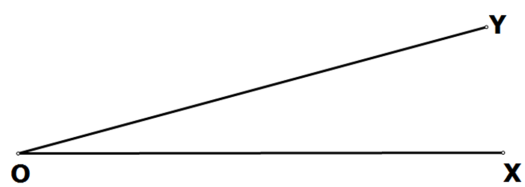
Triplicar un ángulo

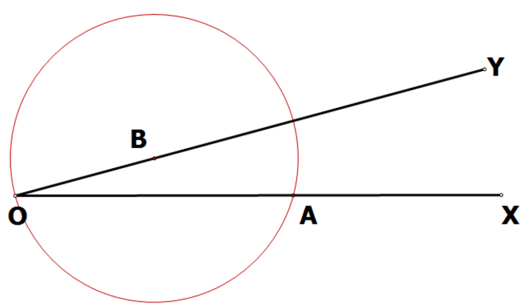
Los Griegos fueron los primeros en utilizar la regla y el compás como instrumentos de trazo en las construcciones geométricas, aunque fueron rápidamente detenidos por problemas de construcción como son la trisección del ángulo (dado un ángulo dividirlo en tres partes iguales) y la duplicación del cubo (construir un cubo de dos veces el volumen de un cubo dado). Ellos no eran capaces de resolver estos problemas con estos aparatos. Para abordar estos problemas, los giegos construyeron nuevos instrumentos. Algunos pensaron que Platón había inventado algunos de ellos; sin embargo Platón culpa a algunos de sus discípulos (Menecmo, Eudoxo,...) por usar estos instrumentos alterando la pureza de la geometría; esta postura es mas coherente con la teoría de Platón. Uno de los que trabajó en la duplicación del cubo y la trisección del ángulo fué Nicomedes utilizando una especie de regla de su propia invención (ver figura 2.1).



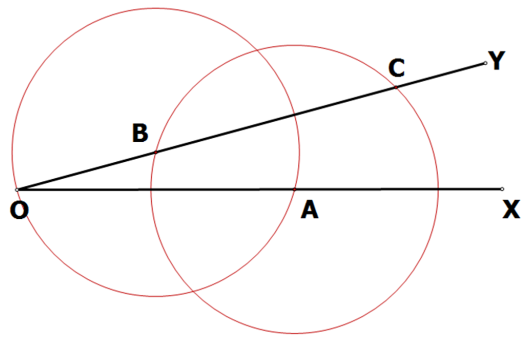
Triplicar un ángulo con regla y compas es posible, veamos, sea $\angle XOY$ un ángulo



ahora tomemos un punto B arbritario sobre OY y tracemos una circunferencia de centro B y que pase por O, a la intersección de esta circunferencia con OX llamemosla A.

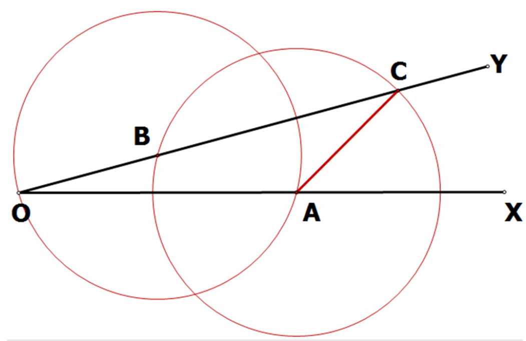


A su vez, tomamos A de centro y con radio AB trazamos un círculo que intersecta a OY en C

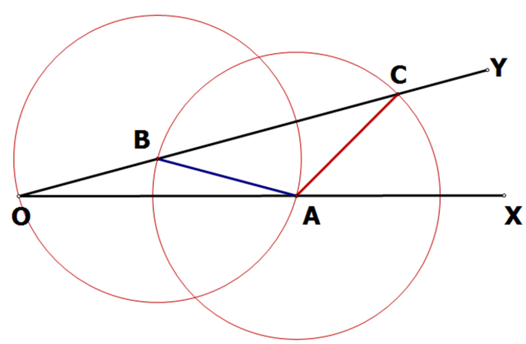


Proposición 1. *el segmento AC es tal que su ángulo $\angle XAC$ es $3\ \angle XOY$ es decir*

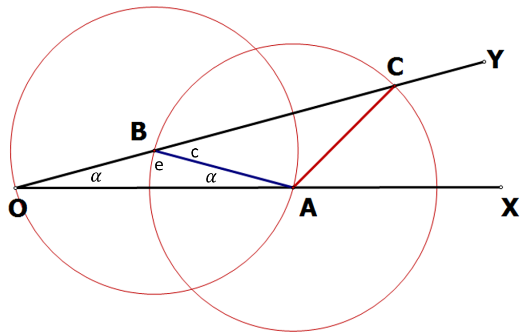
$$\angle XAC = 3\ \angle XOY$$



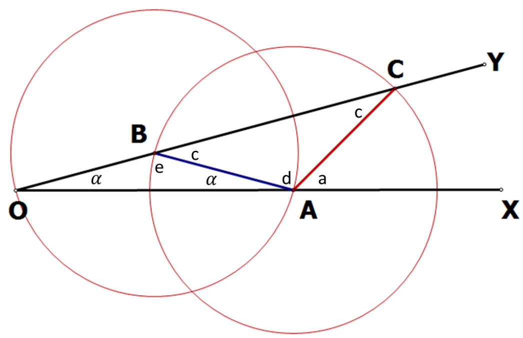
Demostración. Si trazamos el segmento AB



se tiene que $OB = BA$ por ser radios del circulo con centro B por lo que el triángulo $\triangle OAB$ es isoceles de tal manera que los ángulos $\angle AOB = \angle OAB = \alpha$ y llamemos $e = \angle OBA$ y $c = \angle ABC$



analogamente se tiene $AB = AC$ por ser radios del circulo con centro A por lo que el triángulo $\triangle ABC$ es isoceles de tal manera que los ángulos $\angle ABC = \angle ACB = c$ y llamemos $d = \angle BAC$ y $a = \angle XAC$



Según la figura anterior se tiene

$$\angle c + \angle e = 180$$

$$\angle e + 2\ \angle \alpha = 180$$

en consecuencia

$$\angle c + \angle e = \angle e + 2\ \angle \alpha \ \Rightarrow\ \angle c = 2\ \angle \alpha$$

Por otro lado se tiene que en el triángulo $\triangle\ BAC$

$$\angle\ d + 2\ \angle\ c = 180$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\angle c = 2\ \angle \alpha} \quad \angle\ d = 180 - 4\ \angle\ \alpha$$

en consecuencia de la igualdad $\angle a + \angle\ d + \angle\ \alpha = 180$ se tiene

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\angle\ d = 180 - 4\ \angle\ \alpha} \quad \angle a + \angle \alpha + 180 - 4\ \angle\ \alpha = 180$$

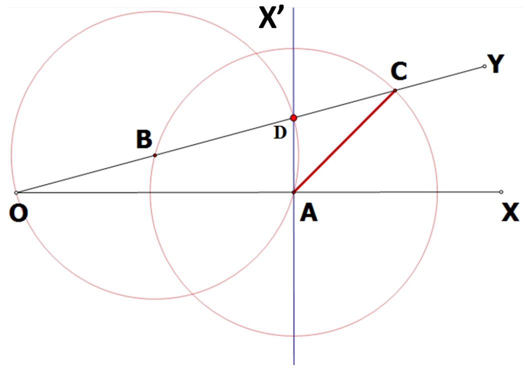
$$\Rightarrow\ \angle a - 3\ \angle\ \alpha = 0$$

$$\Rightarrow\ \angle\ a = 3\ \angle\ \alpha$$

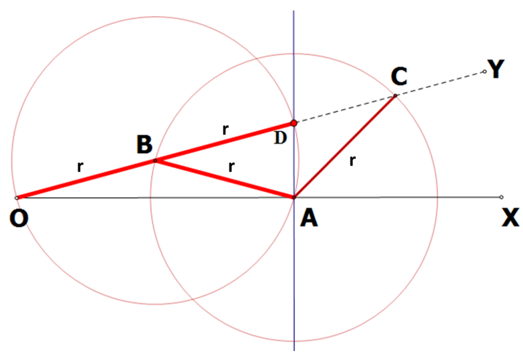
□

Trisección del ángulo

Inversamente si el ángulo $\angle XAC$ esta dado, debe determinarse CO, donde el punto O esta sobre la prolongación de AX. Sea D el punto de intersección distinto de O de la recta OY con el primer círculo trazado; D esta sobre la perpendicular AX' a AX



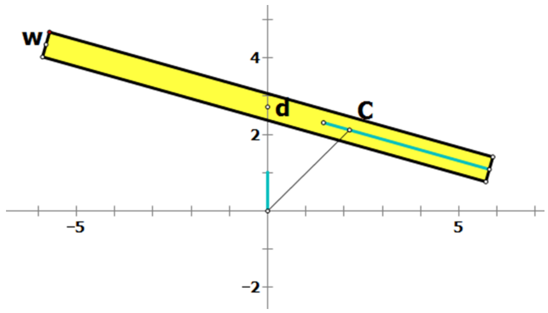
y la recta OY que pasa por C esta determinada por la igualdad DO=2CA; pues $OD = 2r = 2CA$



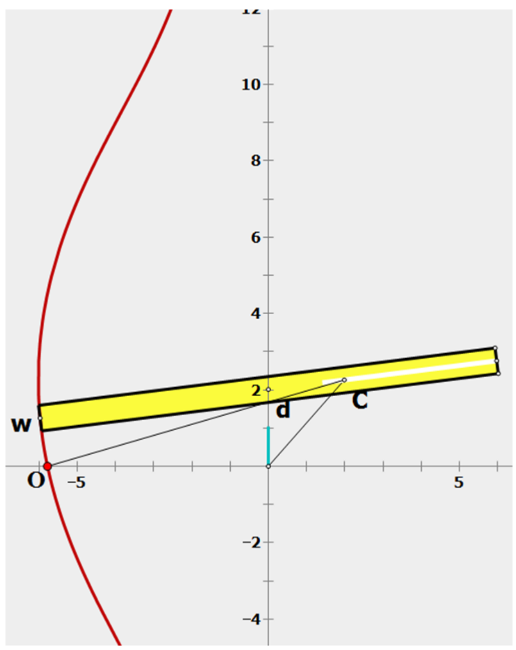
la longitud DO es por tanto conocida.
El problema: *dados un ángulo recto XAX', una longitud d y un punto C, construir una recta que pase por C tal que $|OD| = d$ donde D y O son las intersecciones con AX' y con AX respectivamente.*

A veces se le da el nombre del problema de Pappus. Viete lo menciona como fundamental para la subdivisión de ángulos.

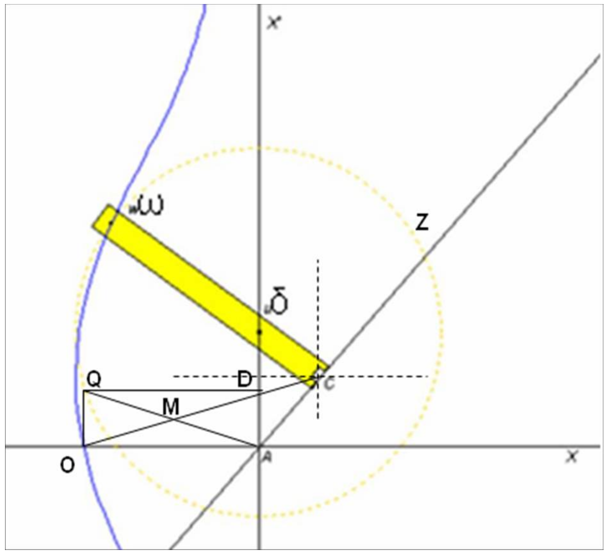
Nicomedes empleó una regla con 2 puntos de referencia ω y δ a una distancia $OD = d$ dicha regla tenía una ranura, el eje de la regla es la recta que une ω con δ (ver figura 2.3).En la ranura se desplazará libremente un punto fijo C del plano.



Cuando se mueve la regla, de modo que el punto δ este sobre AX', el punto ω describe una curva cuya intersección con el eje AX es el punto O buscado.



Demostración. Para demostrar lo anterior tenemos que: Sea OD tal que $OD = d = 2\ CA$ y construimos el rectángulo $OQDA$

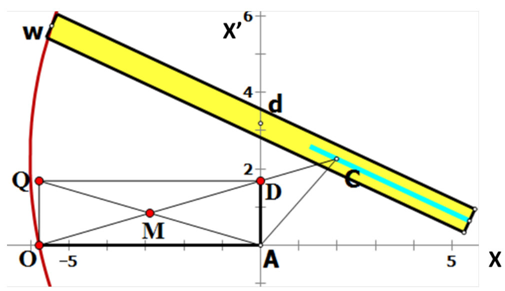


según la figura se tiene $MA = AC$ ya que el triángulo $\triangle AMC$ es isóceles por ser $OD = 2CA$ por lo tanto

$$\angle\ CMA = \angle\ ACM$$

se tiene también que

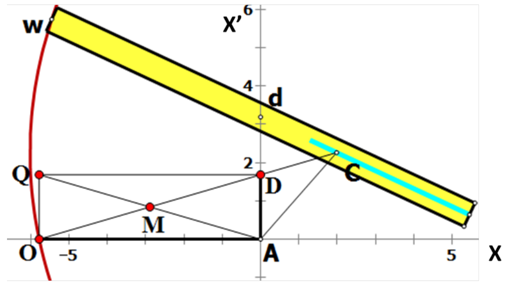
$$\angle\ XAC + \angle\ MAC + \angle\ OAM = \angle\ MAC + 2\ \angle\ AMC$$



Por tanto

$$\angle\ XAC + \angle\ OAM = 2\ \angle\ AMC$$

Por otro lado



$$\angle\, OMA + \angle\, AMC = 2\angle\, OAM + \angle\, OMA$$

$$\Rightarrow\ \angle\, AMC = 2\ \angle\, OAM$$

tenemos entonces que

$$\angle\, XAC + \angle\, OAM = 2\ \angle\, AMC$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\angle\, AMC = 2\ \angle\, OAM} \quad \angle\, XAC + \angle\, OAM = 4\ \angle\, OAM$$

por tanto

$$\angle\, XAC = 3\ \angle\, OAM = 3\ \angle\, AOM$$

$\square$