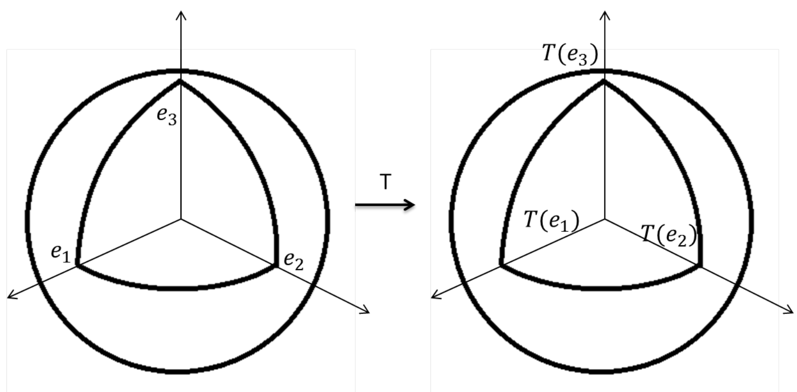
Isometrías de la esfera

Las isometrías de la esfera S^2 son las transformaciones $T : S^2 \to S^2$ que preservan las distancias medidas de la esfera.
Una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$, por definición, preserva producto interior. Por tanto preserva norma y manda a la esfera unitaria en sí misma, pues es el conjunto de vectores unitarios. Además, como la distancia en S^2 se definió con el producto interior (es "distancia angular"), también preserva distancias, por lo que su restricción a S^2 es una isometría.
Inversamente, si $T : S^2 \to S^2$ es una isometría queremos ver que es la restricción de una transformación ortogonal.
Sean $u = T(e_1)$, $v = T(e_2)$ y $w = T(e_3)$. Como el triángulo canónico e_1, e_2, e_3 tiene sus tres lados de tamaño $\frac{\pi}{2}$ (igual que sus tres ángulos) y T preserva distancias, entonces el triángulo u, v,w tiene las mismas características



Vamos a ver que para $\overline{x} = (x, y, z) \in S^2$ se tiene

$$T(\overline{x}) = xu + yv + zw$$

es decir, que T es lineal, pues entonces T será la restricción de una transformación ortogonal

1. Sea u, v, w una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, entonces para cualquier $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$ se tiene que

$$\overline{x} = (\overline{x} \cdot u)u + (\overline{x} \cdot v)v + (\overline{x} \cdot w)w$$

Demostración. Tenemos que para $\overline{x} = su + tv + rw$ se tiene

$$\overline{x} = su + tv + rw \;\Rightarrow\; \overline{x} \cdot u = (su + tv + rw) \cdot u = s$$

$$\overline{x} = su + tv + rw \;\Rightarrow\; \overline{x} \cdot v = (su + tv + rw) \cdot v = t$$

$$\overline{x} = su + tv + rw \;\Rightarrow\; \overline{x} \cdot w = (su + tv + rw) \cdot w = r$$

entonces

$$\overline{x} = (\overline{x} \cdot u)u + (\overline{x} \cdot v)v + (\overline{x} \cdot w)w$$

□

2. para $\overline{x} = (x, y, z) \in S^2$ se tiene

$$\overline{x} \cdot e_1 = \|\overline{x}\|\|e_1\| \cos(\angle\ (\overline{x}, e_1)) = \cos(\angle\ (\overline{x}, e_1)) = \cos(d_{S^2}(\overline{x}, e_1))$$

por otro lado

$$T(\overline{x}) \cdot u = \|T(\overline{x})\|\|T(e_1)\| \cos(\angle\ (T(\overline{x}), T(e_1))) = \cos(\angle\ (T(\overline{x}), T(e_1))) = \cos(d_{S^2}(T(\overline{x}), T(e_1)))$$

como T es isometría

$$d_{S^2}(\overline{x}, e_1) = d_{S^2}(T(\overline{x}), T(e_1)) \ \Rightarrow \ \cos(d_{S^2}(\overline{x}, e_1)) = \cos(d_{S^2}(T(\overline{x}), T(e_1)))$$

por lo tanto

$$\overline{x} \cdot e_1 = T(\overline{x}) \cdot u$$

Análogamente

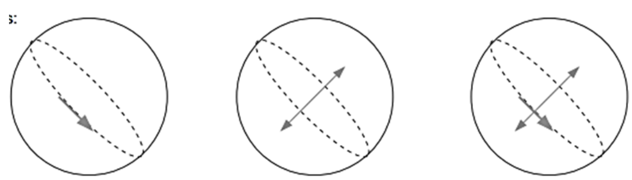
$$\overline{x} \cdot e_2 = T(\overline{x}) \cdot v$$
$$\overline{x} \cdot e_3 = T(\overline{x}) \cdot w$$

y para $\overline{x} = (x, y, z)$ se tiene $x = \overline{x} \cdot e_1$, $y = \overline{x} \cdot e_2$ y $z = \overline{x} \cdot e_3$ por lo que

$$\begin{aligned} T(\overline{x}) &= (T(\overline{x}) \cdot u)u + (T(\overline{x}) \cdot v)v + (T(\overline{x}) \cdot w)w \\ &= (\overline{x} \cdot e_1)u + (\overline{x} \cdot e_2)v + (\overline{x} \cdot e_3)w \\ &= xu + yv + zw \end{aligned}$$

y queda demostrado que toda isometría de S^2 es la restriccion de una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

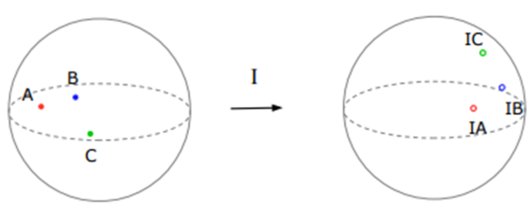
Ejemplos Ejemplos de Isometrías en la esfera son



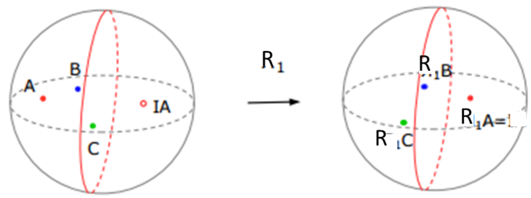
Rotacion Reflexion Reflexion con giro

Lema 1. *Cada isometría de S^2 es la composición de a lo más 3 reflexiones*

Demostración. Sean A, B y C tres puntos de la esfera, y sea $I : S^2 \to S^2$ queremos ver que para llegar a $I(A)$, $I(B)$ $I(C)$ se necesitan a lo más tres reflexiones



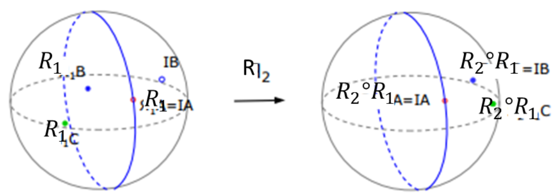
1. Sea $R_1 : S^2 \to S^2$ una reflexión en el circulo que equidista de A y I(A). Esta isometría lleva B y C en $R_1(A)$ y $R_1(B)$



2. Sea $R_2 : S^2 \to S^2$ una reflexión en el circulo que equidista de $R_1(B)$ y $I(B)$. Como

$$d(R_1(A), R_1(B)) = d(I(A), I(B))$$

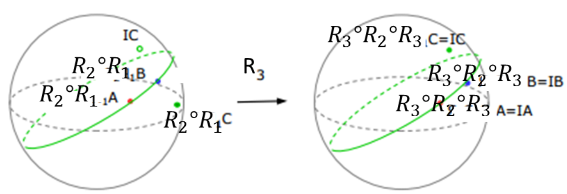
ya que R_1 e I son isometrías, este circulo pasa por $R_1(A) = I(A)$, asi que R_2 no mueve a $R_1(A)$



3. Sea $R_3 : S^2 \to S^2$ una reflexión en el circulo que equidista de $R_2 \circ R_1(C)$ y C'. Como

$$d(R_2 \circ R_1(A), R_2 \circ R_1(C)) = d(I(A), I(C))$$

ya que $R_2 \circ R_1$ e I son isometrías, este circulo pasa por $R_2 \circ R_1(A) = I(A)$ y por $R_2 \circ R_1(B) = I(B)$ asi que R_3 no mueve a $R_2 \circ R_1(A)$ ni a $R_2 \circ R_1(B)$



□