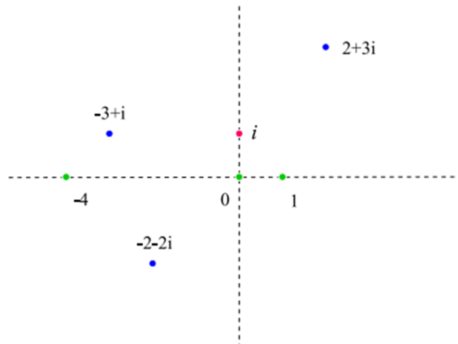
## Interpretación geométrica de la suma y el producto de números complejos

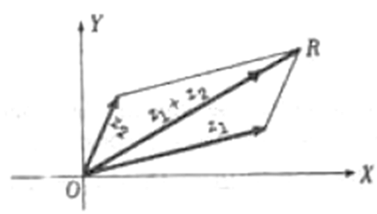
A fines del siglo XVIII Wessel, Argand y Gauss hallaron una interpretacion geometrica de los números de la forma a + bi como puntos del plano con coordenadas cartesianas (a,b).




## Geometría de los números complejos

Hay una manera de identificar los puntos del plano con “números” de modo que se puedan sumar y multiplicar, formando un campo. Al punto del plano con coordenadas reales (a,b) lo identificamos con el “numero” z=a+bi. A estos números se les llama números complejos. Los números complejos pueden sumarse como vectores, si $z_1 = (a + bi)$ y $z_2 = (c + di)$ se tiene

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (c + d)i$$




Y también se pueden multiplicar, si definimos i x i = -1 y si queremos que la multiplicación se distribuya con la suma entonces

$$(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

A los números complejos a veces se les designa con la letra z en lugar de x+yi.
Al conjunto de los números complejos se le denota por $\mathbb{C}$.
La multiplicación de números complejos tiene las mismas propiedades algebraicas que la multiplicación de números reales: es conmutativa y asociativa, hay un neutro multiplicativo $1 = 1 + 0i$ y cada numero complejo a+bi distinto de 0 tiene un inverso multiplicativo:

Para hallar el inverso multiplicativo de $a+ib$ se procede

$$(a+ib)(x+iy)=1 \;\Rightarrow\; (ax-by)+(ay+bx)i=1$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} ax-by=1 & (1) \\ ay+bx=0 & (2) \end{array}$$

Multiplicando (1) por a y (2) por b y sumando

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{c} a^2x-aby=a \\ aby+b^2x=0 \\ ----------- \\ a^2x+b^2x=a \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \; x=\frac{a}{a^2+b^2}$$

Multiplicando (1) por b y (2) por a y

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{c} axb-b^2y=b \\ a^2y+bax=0 \\ ----------- \\ -b^2y-a^2y=b \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \; y=-\frac{b}{a^2+b^2}$$

por lo tanto el inverso de $a+ib$ es

$$\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$$

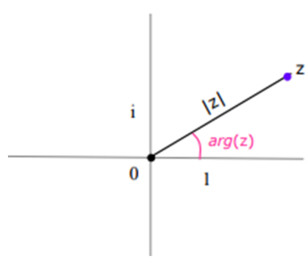
Significado Geométrico de los números complejos

Cada número complejo $z=a+ib$ esta determinado por su norma

$$\rho=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

y por su argumento

$$\theta=\arg(z)=\acute{a}ngulo\ entre\ z\ y\ eje\ X$$



Cualquier número complejo se puede escribir en la forma siguiente, llamada forma polar

$$z = \rho(\cos\ \theta + i\,\text{sen}\ \theta)$$

y como son válidas las propiedades asociativas y conmutativas del producto, se tiene para

$$z_1 = \rho_1(\cos\ \theta_1 + i\,\text{sen}\ \theta_1)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\ \theta_2 + i\,\text{sen}\ \theta_2)$$

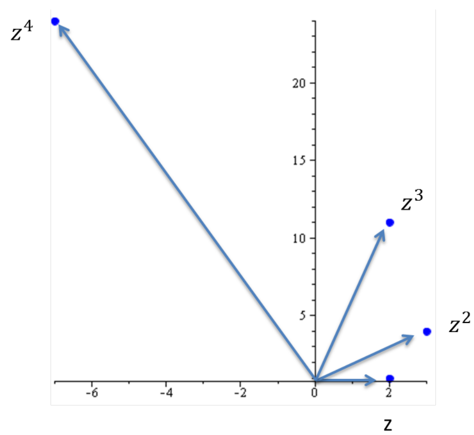
el producto es

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\rho_1(\cos\ \theta_1 + i\,\text{sen}\ \theta_1))(\rho_2(\cos\ \theta_2 + i\,\text{sen}\ \theta_2)) \\ &= \rho_1\rho_2[(\cos\ \theta_1 \cos\ \theta_2 - \text{sen}\ \theta_1\,\text{sen}\ \theta_2)] + i[(\cos\ \theta_1\,\text{sen}\ \theta_2 + \text{sen}\ \theta_1 \cos\ \theta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2[\cos\ (\theta_1+\theta_2) + i(\text{sen}\ (\theta_1+\theta_2))] \end{aligned}$$

por lo tanto el resultado de multiplicar dos números complejos es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos.

**Ejemplo** Si uno de los números complejos está fijo y otro es variable, por ejemplo

$$z = 2+i \ \Rightarrow \ \begin{aligned} zz &= z^2 = 3+4i \\ z^2 z &= z^3 = 2+11i \\ z^3 z &= z^4 = -7+24i \end{aligned}$$




cada multiplicación del número complejo z puede pensarse como una rotación seguida de una homotecia.
Sabemos que tanto las rotaciones como las homotecias son transformaciones lineales, cuyas matrices asociadas son

$$M_{H_k} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \qquad M_{R_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\ \theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\ \theta \end{pmatrix}$$

Sabemos también que la composición de dos transformaciones lineales, es el producto de las matrices asociadas a las transformaciones

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\ \theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos\ \theta & -k\,\text{sen}\ \theta \\ k\,\text{sen}\ \theta & k\cos\ \theta \end{pmatrix}$$

Esta última matriz tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

por lo que se puede asociar a cada número complejo $a+ib$ un matriz, en este caso

$$a+ib \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es $a^2+b^2=|z|^2$ y la matriz corresponde a una homotecia por el factor $|z|$ seguida de una rotación por el ángulo $\arg(z)$.
La multiplicación de numeros complejos $(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$ corresponde a la multiplicación de matrices

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

En particular, la matriz que corresponde al inverso de z es la inversa de la matriz que corresponde a z.

$$z^{-1}=(a+ib)^{-1}=\frac{1}{a+ib} \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1}$$