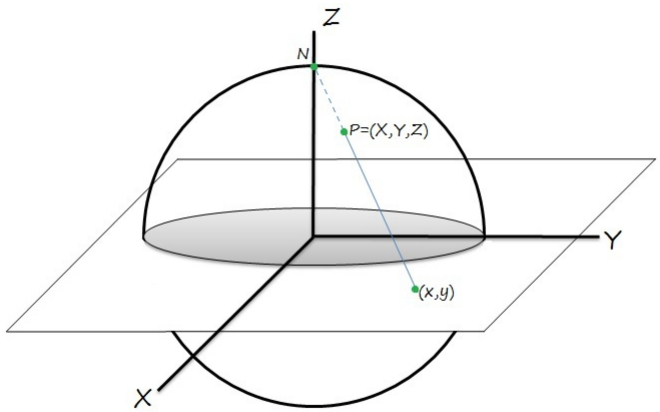
Proyección Estereográfica

Dada una esfera unitaria S^2 y el plano complejo $\mathbb{C}$. Tomando el punto $N = e_3 = (0, 0, 1)$ y haciendo una proyección al plano complejo, se tiene que a cada punto de la esfera le asociamos un punto del plano complejo $\mathbb{C}$. Al punto $N = e_3$ le asociamos al ∞

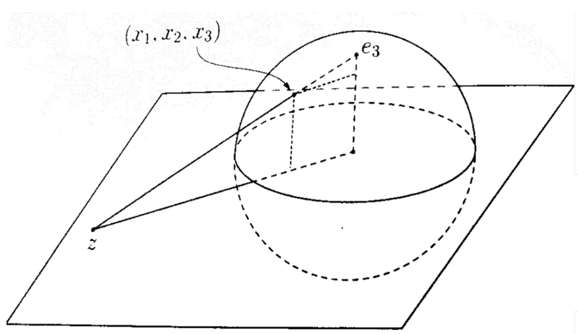


La esfera unitaria

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 = 1\}$$

llamada esfera de Riemann es el modelo requerido para incluir el punto al infinito.
Para asociar cada punto z del plano complejo $\mathbb{C}$ con un punto (x_1, x_2, x_3) de S^2 usamos la siguiente idea.

1. Se toma un punto $e_3 = (0, 0, 1) \in S^2$ y desde e_3 se proyecta una línea hacia un punto cualquiera $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$. Esta línea cruza el plano complejo en un único punto z

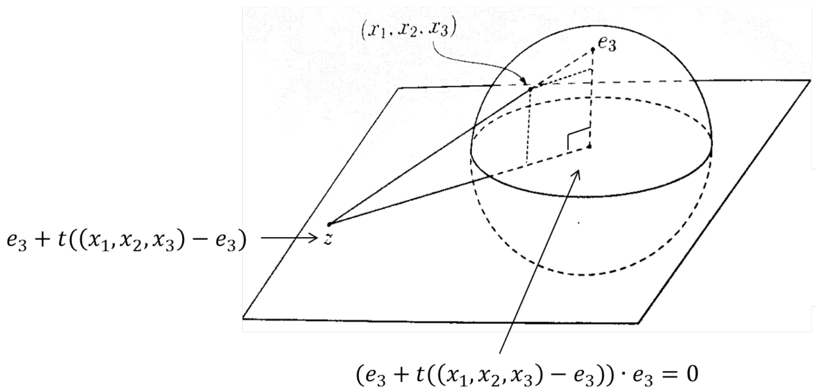


2. Vamos a busca la asociación del punto $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ al punto (x_1, x_2) en el plano que representaría al punto $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$
(a) La recta de e_3 al punto (x_1, x_2, x_3) se puede parametrizar

$$e_3 + t((x_1, x_2, x_3) - e_3), \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) Para esta recta existe un valor t para el cual

$$[e_3 + t((x_1, x_2, x_3) - e_3)] \cdot e_3 = 0$$



es decir

$$[e_3 + t((x_1, x_2, x_3) - e_3)] \cdot e_3 = 0 \;\Rightarrow\; [(0,0,1) + t((x_1, x_2, x_3) - (0,0,1))] \cdot (0,0,1) = 0$$
$$\Rightarrow\; [tx_1, tx_2, 1 + t(x_3 - 1)] \cdot (0,0,1) = 0$$
$$\Rightarrow\; 1 + t(x_3 - 1) = 0$$
$$\Rightarrow\; t = \frac{1}{1 - x_3}$$

(c) Con este valor de t buscamos el punto z del plano complejo asociado al punto $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$, se tiene entonces

$$e_3 + \frac{1}{1-x_3}((x_1, x_2, x_3) - e_3) = e_3 + \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, \frac{x_3 - 1}{1-x_3}\right)$$
$$= (0,0,1) + \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, \frac{x_3 - 1}{1-x_3}\right)$$
$$= \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0\right)$$

(d) Podemos entonces definir la función $\psi = S^2 - \{e_3\} \to \mathbb{C}$ como

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0\right)$$

3. Ahora vamos a encontrar una asociación del punto z del plano complejo al punto $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$, para esto se tiene
   (a) $z = \psi(x_1, x_2, x_3)$

(b) $x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 = 1$
(c) Entonces

$$|z|^2 = \left|\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}\right|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

por lo tanto

$$|z|^2 = \frac{1 + x_3}{1 - x_3} \;\Rightarrow\; \boxed{x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}}$$

Por otro lado

$$z + \overline{z} = \left(\frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3}\right) + \left(\frac{x_1}{1 - x_3} - i\frac{x_2}{1 - x_3}\right)$$

$$\Rightarrow\; z + \overline{z} = \frac{2x_1}{1 - x_3}$$

$$\Rightarrow\; \boxed{x_1 = \frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}}$$

finalmente

$$z - \overline{z} = \left(\frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3}\right) - \left(\frac{x_1}{1 - x_3} - i\frac{x_2}{1 - x_3}\right)$$

$$\Rightarrow\; z - \overline{z} = \frac{2ix_2}{1 - x_3}$$

$$\Rightarrow\; \boxed{x_2 = \frac{z - \overline{z}}{i(|z|^2 + 1)}}$$

por tanto la función $\pi : \mathbb{C} \to S^2 - \{e_3\}$ esta dada por

$$\pi(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \overline{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)$$

haciendo corresponder ∞ con el polo e_3 y con las funciones ψ y π se obtiene una biyección de S^2 con $\mathbb{C}$. A esta biyección se le llama proyección estereográfica

Definición 1. *Los puntos del plano complejo junto con ∞ forman el* ***plano complejo extendido****, denotado* $\hat{\mathbb{C}}$