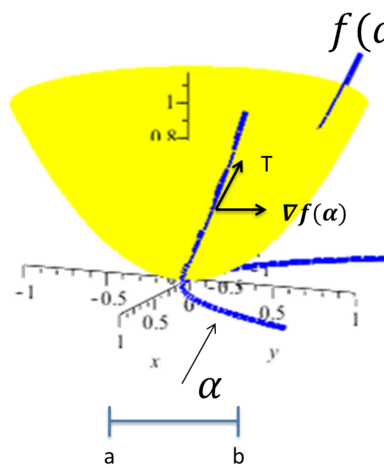
Plano tangente a cuádrica

Cada una de las superficies cuádricas es el lugar geométrico de los punto del espacio que satisfacen una ecuación polinomial en tres variables, el problema de dar un método para obtener el plano tangente a una cuádrica en uno de sus puntos quedará resuelto si damos un método para obtenerlo cuando la superficie esté dado por la ecuación $f(x, y, z) = 0$ con $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable.
Supongamos que tenemos una curva parametrizada $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en la superficie de nivel k de la función f



eso significa que el punto imagen $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ bajo la función $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ satisface la ecuación de la superficie, es decir, $f(\alpha(t)) = k$.
Tenemos entonces la composición de funciones

$$f \circ \alpha : (a, b) \to \mathbb{R}$$

y por tanto tiene sentido encontrar la derivada de la función $f \circ \alpha$ en $t_0 \in (a, b)$. Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{dt} = \nabla\ f \cdot \alpha'$$

Teniendo en cuenta que las superficies de nivel se caracterizan porque la función toma un valor constante k en todos sus puntos; en particular para todos los puntos $(x(t), y(t), z(t))$ de la curva tenemos

$$f(x(t), y(t), z(t)) = k$$

si $P_0 = \alpha(t_0)$ entonces al derivar de ambos lados

$$\nabla\ f(P_0) \cdot \alpha'(t_0) = 0$$

lo cual significa cuando $\nabla\ f(P_0)$ no es cero, que es un vector perpendicular al vector tangente de cualquier curva en la superficie.

Definición 1. *El plano tangente a una superficie de ecuación $f(x,y,z)=0$ en un punto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ tal que $\nabla\ f(P_0)\neq 0$ es el plano de ecuación*

$$(P-P_0)\cdot\nabla\ f(P_0)=0$$

que contiene a la recta tangente a cualquier curva suave contenida en la superficie y que pase por P_0

Ejemplo Obtenga la ecuación del plano tangente la superficie de ecuación

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1,\quad en\quad el\quad punto\quad (\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$$

Solución Definimos la función

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}-1$$

así el elipsoide es una superficie de nivel cero.
Como

$$\nabla\ f=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{8},\frac{2z}{9}\right)$$

tenemos que el plano tangente es

$$\nabla\ f(\sqrt{2},2\sqrt{2},0)\cdot(x-\sqrt{2},y-2\sqrt{2},z-0)=0$$

$$\Rightarrow\quad\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4},0\right)\cdot(x-\sqrt{2},y-2\sqrt{2},z-0)=0$$

$$\Rightarrow\ 2\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-8=0$$

Al tomar en cuenta el plano tangente a la superficie en uno de sus puntos nos daría otra manera de obtener las dos rectas que estan contenidas en la superficie y que pasan por un punto de ella.
Método
(1) Obtenemos la ecuación del plano tangente a la superficie por el punto.
(2) Resolvemos el sistema formado por la ecuación de la cuádrica y la ecuación del plano tangente.
(3) La ecuación resultante de dicho sistema se descompone en dos factores lineales; el sistema formado por la ecuación del plano tangente y la nulidad de cada uno de los factores proporciona cada una de las rectas buscadas

Ejemplo Use el método descrito anteriormente, para determinar que el parabolóide hiperbólico de ecuación cartesiana

$$z=9x^2-16y^2$$

es una superficie reglada y determinar las ecuaciones de las rectas contenidas en el parabolóide y que pasen por el punto $(1,1,-7)$

Solución En este caso escribimos la función de manera implicita

$$f(x,y,z)=9x^2-16y^2-z=0$$

Vamos a calcular su plano tangente en el punto dao, para ello calculamos su gradiente

$$\nabla\ f = (18x, -32y, -1)$$

evaluando el gradiente en el punto $(1, 1, -7)$ se obtiene

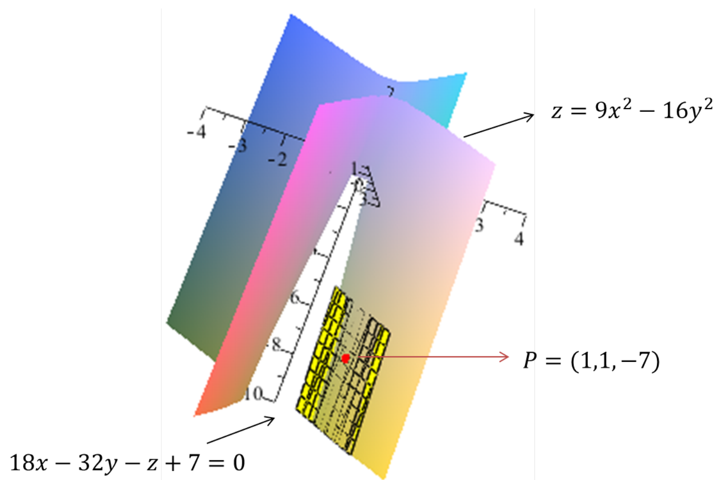
$$\nabla\ f(1, 1, -7) = (18, -32, -1)$$

Por lo tanto el plano tangente en el punto $(1, 1, -7)$ es

$$[(x, y, z) - (1, 1, -7)] \cdot (18, -32, -1)$$

Simplificando obtenemos la ecuación del plano tangente

$$18x - 32y - z + 7 = 0$$



Ahora vamos a proceder a resolver el sistema

$$\begin{array}{c} 18x - 32y - z + 7 = 0 \ \ (\ \textit{plano tangente}\ ) \\ z = 9x^2 - 16y^2 \ \ (\ \textit{paraboloide hiperbolico}\ ) \end{array}$$

Despejando z de ambas ecauciones e igualando obtenemos

$$18x - 32y - z + 7 = 0\ \Rightarrow\ z = 18x - 32y + 7$$

$$z = 9x^2 - 16y^2$$

$$\therefore\ \ 18x - 32y + 7 = 9x^2 - 16y^2$$

que se puede escribir

$$9x^2 - 18x - 16y^2 + 32y = 7$$

$$\Rightarrow\ 9(x^2 - 2x + 1) - 16(y^2 - 2y + 1) = 7 + 9 - 16$$

$$\Rightarrow \; 9(x-1)^2 - 16(y-1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \; [3(x-1)+4(y-1)] \cdot [3(x-1)-4(y-1)] = 0$$

tomando

$$[3(x-1)+4(y-1)] = 0$$

se tiene

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{3} \quad (1)$$

Por otro lado

$$[3(x-1)+4(y-1)] = 0 \; \Rightarrow \; 3x+4y-7=0$$
$$\Rightarrow \; 18x+24y-42=0$$
$$\Rightarrow \; 18x = -24y+42$$

sustituimos en la ecuación del plano tangente y obtenemos

$$-24y+42-32y-z+7=0$$
$$\Rightarrow \; -56y+49-z=0$$
$$\Rightarrow \; -56y+56=z+7$$
$$\Rightarrow \; -168y+168=3(z+7)$$
$$\Rightarrow \; -168(y-1)=3(z+7)$$
$$\Rightarrow \; \frac{y-1}{3} = -\frac{z+7}{168} \quad (2)$$

de (1) y (2) se tiene la recta en forma simétrica

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{3} = -\frac{z+7}{168}$$

que se puede escribir en forma paramétrica

$$(x,y,z) = (1,1,-7) + t(-4,3,-168)$$

veamos que ésta recta efectivamente se encuentra en el paraboloide se tiene que

$$\begin{aligned} x &= 1-4t \\ y &= 1+3t \\ z &= -7-168t \end{aligned}$$

por lo que

$$9x^2-16y^2 = 9(1-4t)^2 - 16(1+3t)^2 = -7-168t$$

este último es el valor de z y la recta esta en el paraboloide hiperbólico.

Ahora tomando

$$[3(x-1)-4(y-1)]=0$$

se tiene

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{3} \qquad (3)$$

Por otro lado

$$[3(x-1)-4(y-1)]=0 \;\Rightarrow\; 3x-4y+1=0$$
$$\Rightarrow\; 18x=24y-6$$

sustituimos en la ecuación del plano tangente y obtenemos

$$24y-6-32y-z+7=0 \;\Rightarrow\; -8y-z+1=0$$
$$\Rightarrow\; -8y+8=z+7$$
$$\Rightarrow\; -24y+24=3(z+7)$$
$$\Rightarrow\; -24(y-1)=3(z+7)$$
$$\Rightarrow\; \frac{y-1}{3}=-\frac{z+7}{24} \qquad (4)$$

con (3) y (4) se tiene la recta en forma simétrica

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{3}=-\frac{z+7}{24}$$

que se puede escribir en forma paramétrica

$$(x,y,z)=(1,1,-7)+t(4,3,-24)$$

veamos que ésta recta efectivamente se encuentra en el paraboloide se tiene que

$$\begin{aligned} x&=1+4t\\ y&=1+3t\\ z&=-7-24t \end{aligned}$$

por lo que

$$9x^2-16y^2=9(1+4t)^2-16(1+3t)^2=-7-24t$$

este último es el valor de z y la recta esta en el paraboloide hiperbólico.