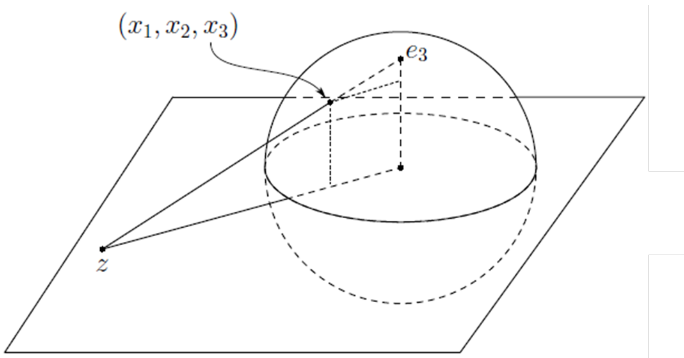
Proyección Esteregráfica

Dada una esfera unitaria S^2 y el plano complejo $\mathbb{C}$. Tomando el punto $N = e_3 = (0, 0, 1)$ y haciendo una proyección al plano complejo, se tiene que a cada punto de la esfera le asociamos un punto del plano complejo $\mathbb{C}$. Al punto $N = e_3$ le asociamos al ∞



La función $\psi = S^2 - \{e_3\} \to \mathbb{C}$ como

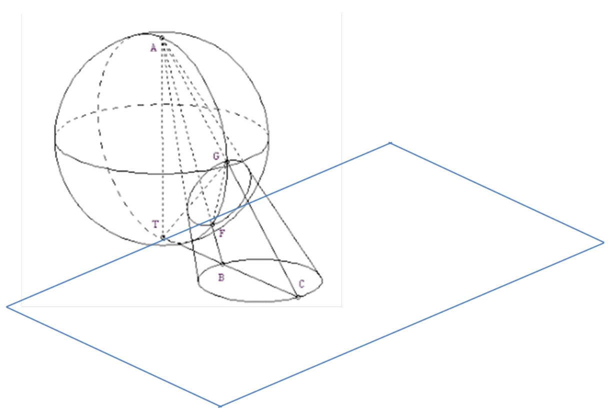
$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3}$$

La función $\pi : \mathbb{C} \to S^2 - \{e_3\}$ esta dada por

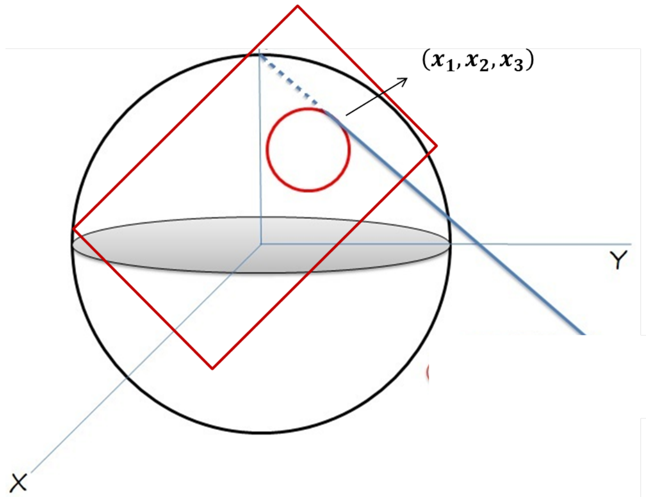
$$\pi(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \overline{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

haciendo corresponder ∞ con el polo e_3 y con las funciones ψ y π se obtiene una biyección de S^2 con $\mathbb{C}$. A esta biyección se le llama proyección estereográfica.

Proposición 1. *Bajo la proyección estereográfica, círculos en S^2 se transforman en circulos en $\mathbb{C}$*



Demostración. Un círculo en S^2 es intersección de un plano con la esfera



tiene ecuación

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

Éste círculo es la imagen bajo la proyección estereográfica de un conjunto cuyos puntos satisfacen la siguiente ecuación en el plano

$$a\left(\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}\right) + b\left(\frac{z-\overline{z}}{i(|z|^2+1)}\right) + c\left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) = d$$

escribiendo $z = x + iy$, se obtiene

$$2ax + 2by + c(x^2+y^2-1) = d(x^2+y^2+1) \quad (1)$$

Si ocurriera en (1) que $c = d$ entonces se tiene la ecuación de una recta.

$$2ax + 2by = c + d$$

Si ocurriera en (1) que $c \neq d$ podemos completar cuadrados y obtenemos

$$\left(x + \frac{a}{c-d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{c-d}\right)^2 = k$$

donde $k = \left(\frac{d+c}{c-d}\right) + \left(\frac{a}{c-d}\right)^2 + \left(\frac{b}{c-d}\right)^2$.
Por lo tanto (1) representa la ecuación de una recta o un círculo.

Por otro lado, una recta en el plano está definida

$$ax + by = c$$

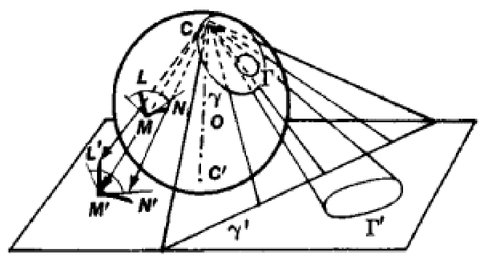
Estos puntos bajo la proyección estereográfica son llevados al conjunto de puntos en la esfera definidos por la ecuación

$$a\left(\frac{x_1}{1-x_3}\right) + b\left(\frac{x_2}{1-x_3}\right) = c$$

$$\Rightarrow\ ax_1 + bx_2 = c(1-x_3)$$

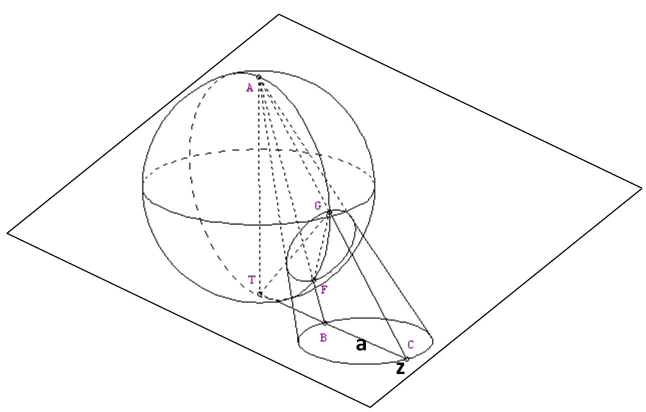
$$\Rightarrow\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = c$$

los cuales estan contenidos en la intersección de un plano y la esfera, es decir se trata de un círculo. Se tiene también que $(0,0,1)$ satisface dicha ecuación, entonces éste círculo pasa por el polo norte



Finalmente un círculo en el plano está definido por

$$|z-a| = r$$



a partir de esta espresión se tiene

$$|z-a|^2 = r^2$$

$$\Rightarrow\ (z-a)\overline{(z-a)} = r^2$$

$$\Rightarrow\ (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = r^2$$

$$\Rightarrow\ z\overline{z} - z\overline{a} - a\overline{z} + a\overline{a} = r^2$$
$$\Rightarrow\ |z|^2 - z\overline{a} - a\overline{z} + |a|^2 = r^2$$

Ahora bien

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\ \Rightarrow\ |z|^2 = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

y también

$$\begin{pmatrix} a = a_1 + ia_2 \\ z = x + iy \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ Re(a\overline{z}) = \frac{a\overline{z} + \overline{a}z}{2}\ \Rightarrow\ 2Re(a\overline{z}) = a\overline{z} + \overline{a}z$$

de acuerdo a lo anterior

$$|z|^2 - z\overline{a} - a\overline{z} + |a|^2 = r^2\ \Rightarrow\ \frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2Re(a\overline{z}) = r^2 - |a|^2$$

y como $Re(a\overline{z}) = a_1x + a_2y$ entonces

$$\frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2Re(a\overline{z}) = r^2 - |a|^2$$
$$\Rightarrow\ \frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2(a_1x + a_2y) = r^2 - |a|^2$$
$$\Rightarrow\ \frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2(a_1x - 2a_2y) = r^2 - |a|^2$$

de la función ψ se tiene

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\frac{x_1}{1 - x_3}}_{x} + i\underbrace{\frac{x_2}{1 - x_3}}_{y}$$

según lo anterior

$$\frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2(a_1x - 2a_2y) = r^2 - |a|^2$$
$$\Rightarrow\ \frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2a_1\left(\frac{x_1}{1 - x_3}\right) - 2a_2\left(\frac{x_2}{1 - x_3}\right) = r^2 - |a|^2$$
$$\Rightarrow\ 1 + x_3 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 = (r^2 - |a|^2)(1 - x_3)$$

estos puntos están contenidos en un plano y por lo tanto constituyen un círculo en la esfera $\square$