Simetrías y extensión de las superficies cuádricas

Definición 1. *Una figura* $S \subset \mathbb{R}^3$ *es simétrica respecto al origen si siempre que un punto* $P(x, y, z)$ *pertenece a la figura, el punto* $P_0(-x, -y, -z)$ *también pertenece a la figura*

Definición 2. *Una figura* $S \subset \mathbb{R}^3$ *es simétrica respecto al eje* X *si siempre que un punto* $P(x, y, z)$ *pertenece a la figura, el punto* $P_x(x, -y, -z)$ *también pertenece a la figura*

Definición 3. *Una figura* $S \subset \mathbb{R}^3$ *es simétrica respecto al eje* Y *si siempre que un punto* $P(x, y, z)$ *pertenece a la figura, el punto* $P_y(-x, y, -z)$ *también pertenece a la figura*

Definición 4. *Una figura* $S \subset \mathbb{R}^3$ *es simétrica respecto al eje* Z *si siempre que un punto* $P(x, y, z)$ *pertenece a la figura, el punto* $P_z(-x, -y, z)$ *también pertenece a la figura*

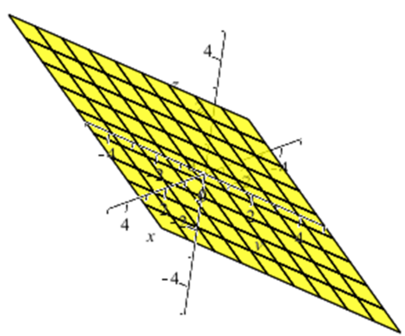
Definición 5. *Una figura* $S \subset \mathbb{R}^3$ *es simétrica respecto al plano* XY *si siempre que un punto* $P(x, y, z)$ *pertenece a la figura, el punto* $P_{xy}(x, y, -z)$ *también pertenece a la figura*

Definición 6. *Una figura* $S \subset \mathbb{R}^3$ *es simétrica respecto al plano* YZ *si siempre que un punto* $P(x, y, z)$ *pertenece a la figura, el punto* $P_{yz}(-x, y, z)$ *también pertenece a la figura*

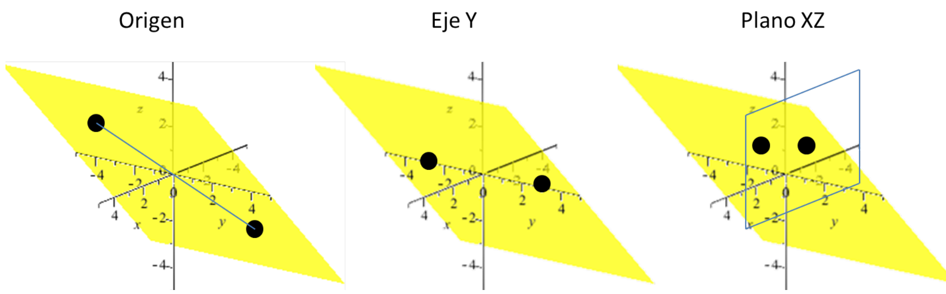
Definición 7. *Una figura* $S \subset \mathbb{R}^3$ *es simétrica respecto al plano* ZX *si siempre que un punto* $P(x, y, z)$ *pertenece a la figura, el punto* $P_{xy}(x, -y, z)$ *también pertenece a la figura*

Ejemplo Determine cuáles simetrias posee la superficie $z = x$

Solución Esta ecuación deja libre a la variable Y pot tanto se trata de un plano



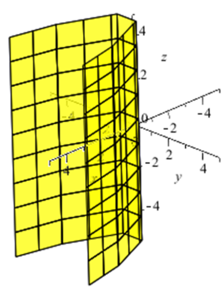
Se tiene simetría al origen pues si (x, y, z) pertenece a la superficie entonces $(-x, -y, -z)$ también pertenece a la superficie
Se tiene simetría con el eje Y pues si (x, y, z) pertenece a la superficie entonces $(-x, y, -z)$ también pertenece a la superficie
Se tiene simetría con respecto al plano XZ pues si (x, y, z) pertenece a la superficie entonces $(x, -y, z)$ también pertenece a la superficie



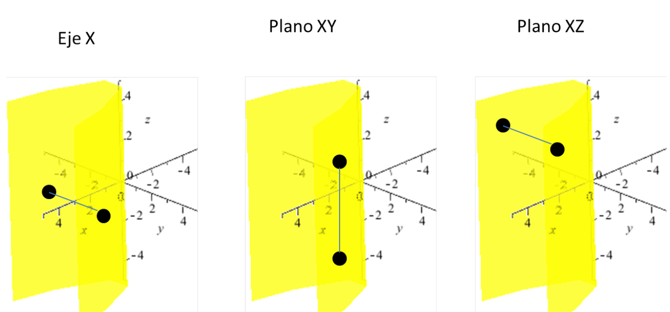
Ejemplo

Ejemplo Determine cuáles simetrias posee la superficie $x = y^2$

Solución Esta ecuación deja libre a la variable Z pot tanto se trata de un cilíndro parabólico

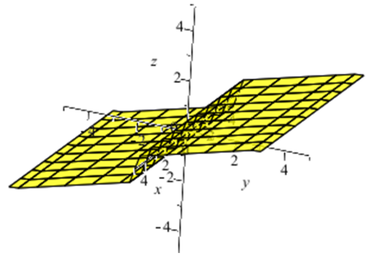


Se tiene simetría al eje X pues si (x, y, z) pertenece a la superficie entonces $(x, -y, -z)$ también pertenece a la superficie
Se tiene simetría con al plano XY pues si (x, y, z) pertenece a la superficie entonces $(x, y, -z)$ también pertenece a la superficie
Se tiene simetría con respecto al plano XZ pues si (x, y, z) pertenece a la superficie entonces $(x, -y, z)$ también pertenece a la superficie



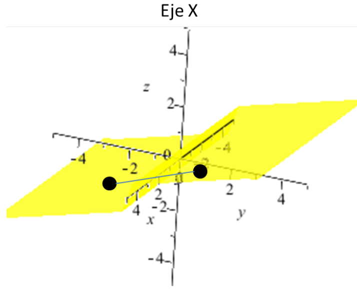
Ejemplo Determine cuáles simetrias posee la superficie $y = y^3$

Solución Esta ecuación deja libre a la variable X pot tanto se trata de un cilíndro cúbico

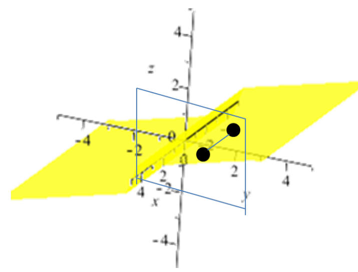


Se tiene simetría al eje X pues si (x, y, z) pertenece a la superficie entonces $(x, -y, -z)$ también pertenece a la superficie
Se tiene simetría con al plano YZ pues si (x, y, z) pertenece a la superficie entonces $(-x, y, z)$ también pertenece a la superficie

Eje X



Plano XZ



Extensión

Decimos que una figura $S \subset \mathbb{R}^3$ esta acotada si existe alguna esfera que la contiene

Ejemplo El elipsoide de forma canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

esta acotado por la esfera de radio $\text{máx}\{a, b, c\}$, pues si P esta en el elipsoide y $\text{máx}\{a, b, c\} = a$ se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{z^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es decir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{z^2} \leq 1$$

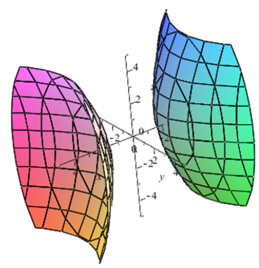
$$\Rightarrow \; x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$$

es decir P esta dentro de la esfera

Como la única cónica acotada es la elipse, cuando en una superficie contenga parábola ó hiperbólas, no podremos encontrar ninguna esfera que la contenga. Pero será util encontrar planos, conos, etc. que delimiten a nuestra superficie

Ejemplo El hiperbolóide de dos mantos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$



podemos delimitarlo por el par de planos

$$(y - 2x)(y + 2x) = 0$$