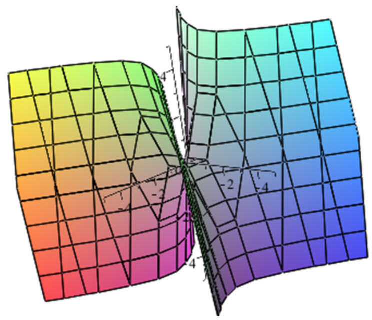
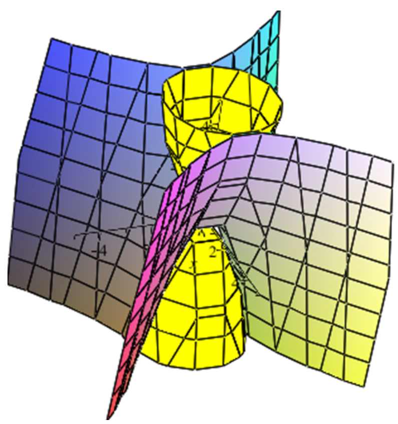
Extensión de las superficies cuádricas

Ejemplo Considere el parabolóide hiperbólico

$$x^2 - y^2 = z$$



que puede delimitarse por los parabolóides $x^2 + y^2 = z, \quad -\left(x^2 + y^2\right) = z$



pues si un punto P pertenece a uno de los paraboloides entonces se cumple $x^2 - y^2 = z$ y si P pertenece también al parabolóide hiperbólico entonces se cumple $x^2 + y^2 = z$ igualando tenemos

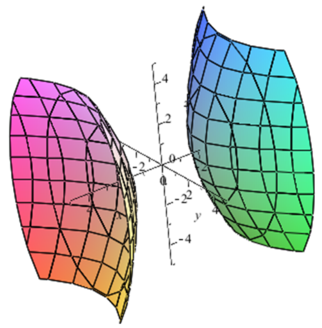
$$x^2 - y^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad -y^2 = y^2$$

lo cual es absurdo, para valores $y \neq 0$ por lo que un punto del parabolóide no pertenece al parabolóide hiperbólico

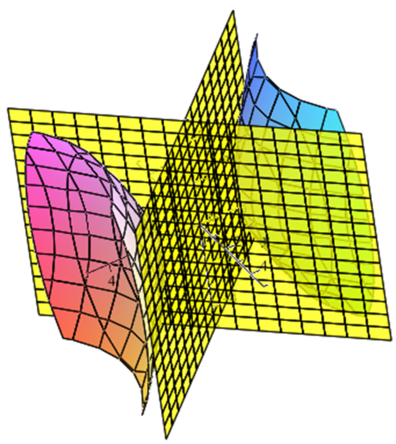
Ejemplo Considere el hiperbolóide de dos mantos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



que puede delimitarse por los planos $y = \left(\frac{b}{a}\right) x$ y $y = -\left(\frac{b}{a}\right) x$

$$(ay - bx)(ay + bx) = 0$$



pues si un punto P pertenece a uno de los planos entonces se cumple $y = \left(\frac{b}{a}\right) x$ si sustituimos en la ecuación del hiperbolóide tenemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{z^2}{c^2} = 1$$

lo cual es absurdo, por lo que un punto del plano no pertenece al hiperbolóide de dos mantos

Cuádricas con ejes paralelos a los ejes coordenados

Si trasladamos una superficie cuádrica S en posición canonica, cada $P \in S$ se dezplaza en una dirección $\overline{u} = (h, k, l)$ y se convierte en el punto $P' \in S'$, es decir

$$\begin{gathered} P' = P + \overline{u} \\ P = P' - \overline{u} \end{gathered}$$

en términos de las coordenadas

$$\begin{gathered} x = x' - h \\ y = y' - k \\ z = z' - l \end{gathered}$$

si aplicamos lo anterior a la ecuación

$$f(x, y, x) = 0$$

se obtiene

$$f(x' - h, y' - k, z' - l) = 0$$

Ejemplo Considere el parabolóide hiperbólico

$$z^2 - x^2 = y$$

que al trasladarlo por el vector $(-3, -2, -1)$ se obtiene

$$(z + 1)^2 - (x - 3)^2 = y + 2$$