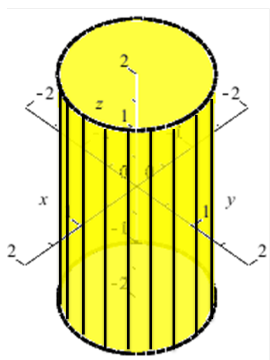
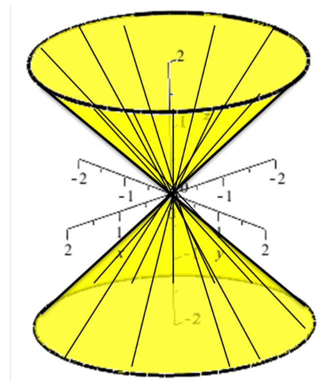
Superficies Regladas

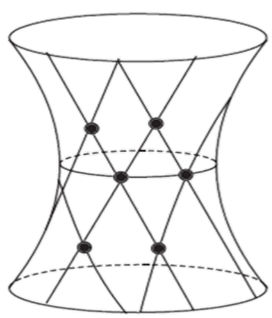
Definición 1. *Una superficie con la propiedad de que para cada punto en ella hay toda una recta que está contenida en la superficie y que pasa por el punto, se denomina superficie reglada*

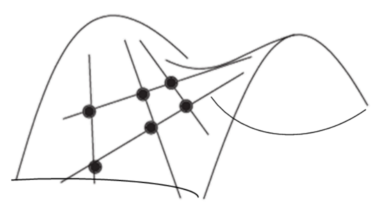
Ejemplo El cilíndro y el cono circular son ejemplos de superficies regladas





Ejemplo En algunas superficies puede ocurrir que por cada punto pase más de una recta contenida en dicha superficie, en tal caso las superficies se denominan doblemente regladas, el hiperbolóide de un manto y el parabolóide hiperbólico son ejemplos de superficies doblemente regladas





Ejemplo Para mostrar que un parabolóide hiperbólico es una superficie doblemente reglada, procedemos de la siguiente forma

(a) Dada la ecuación

$$x^2 - y^2 = z$$

(b) Se reescribe como

$$x^2 - y^2 = (kz)\left(\frac{1}{k}\right)$$

(c) podemos escribir considerando $(k \neq 0)$

$$(x+y)(x-y) = (kz)\left(\frac{1}{k}\right)$$

(d) Para $k \neq 0$ establecemos los sistemas de ecuaciones

$$(x+y) = kz, \quad (x-y) = \frac{1}{k}$$

$$(x-y) = kz, \quad (x+y) = \frac{1}{k}$$

(e) Como las dos ecuaciones son lineales y, por tanto, corresponden a planos; los vectores normales son, respectivamente

$$\overline{u}_k = (1, 1, -k)\,, \quad \overline{v}_k = (1, -1, 0)$$

$$\overline{u}_k = (1, -1, -k)\,, \quad \overline{v}_k = (1, 1, 0)$$

(f) Como estos vectores nunca son paralelos, los dos planos se cortan en una recta que está contenida en la superficie y cuya dirección puede obtenerse mediante el producto cruz de los vectores normales. Para el primer sistema se tiene

$$(1, 1, -k) \times (1, -1, 0) = (-k, -k, -2)$$

Para el segundo sistema se tiene

$$(1, -1, -k) \times (1, 1, 0) = (k, -k, 2)$$

Cuando elegimos un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ en el parabolóide hiperbólico, la sustitución de ese punto en la ecuación determina el valor de k y de los vectores $\overline{u}_k$ y $\overline{v}_k$. Por tanto tendríamos las ecuaciones de las dos rectas

$$(x, y, z) = P_0 + t(-k, -k, -2)$$

$$(x, y, z) = P_0 + t(k, -k, 2)$$

Ejemplo Considérese el parabolóide hiperbólico

$$x^2 - y^2 = z$$

dado el punto $(0, 1, -1)$ en el, halle las ecuaciones de las dos rectas contenidas en la superficie y que pasan por el punto.

Solución Sustituyendo el punto $(0, 1, -1)$ en la ecuación $(x+y) = (kz)$ se obtiene

$$0 + 1 = k(-1) \;\Rightarrow\; k = -1$$

lo que implica que el vector de dirección de la recta es $(1, 1, -2)$ y la recta correspondiente al primer sistema es:

$$(x, y, z) = (0, 1, -1) + t(1, 1, -2)$$

y para comprobar que esta recta pertenece al parabolóide hiperbólico tenemos que

$$x^2 - y^2 = t^2 - (1+t)^2 = -1 - 2t = z$$

Sustituyendo el punto $(0, 1, -1)$ en la ecuación $(x-y) = (kz)$ se obtiene

$$0 - 1 = -k(1) \;\Rightarrow\; k = 1$$

lo que implica que el vector de dirección de la recta es $(1,-1,2)$ y la recta correspondiente al segundo sistema es:

$$(x,y,z)=(0,1,-1)+t(1,-1,2)$$

y para comprobar que esta recta pertenece al paraboló ide hiperbólico tenemos que

$$x^2-y^2=t^2-(1-t)^2=-1+2t=z$$

Ejemplo Para mostrar que un hiperbolóide de un manto es una superficie doblemente reglada, procedemos de la siguiente forma

(a) Dada la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(b) Se reescribe como

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

(c) como ambos miembros son diferencia de cuadrados, podemos escribir considerando $(k\neq 0)$

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left[k\left(1+\frac{y}{b}\right)\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]$$

(d) Para $k\neq 0$ establecemos los sistemas de ecuaciones

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=k\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

(e) Como las dos ecuaciones son lineales y, por tanto, corresponden a planos; los vectores normales son, respectivamente

$$\overline{u}_k=\left(\frac{1}{a},\frac{-k}{b},\frac{1}{c}\right)$$

$$\overline{v}_k=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{kb},\frac{-1}{c}\right)$$

(f) Como estos vectores nunca son paralelos, los dos planos se cortan en una recta que está contenida en la superficie y cuya dirección puede obtenerse mediante el producto cruz de los vectores normales. Cuando elegimos un punto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ en el hiperbolóide de un manto, la sustitución de ese punto en la ecuación determina el valor de k y de los vectores $\overline{u}_k$ y $\overline{v}_k$.

Un desarrollo ahora con las ecaciones

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=k\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\frac{1}{k}\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

Nos da los siguientes vectores normales

$$\overline{u}=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{kb},\frac{1}{c}\right)$$

$$\overline{v} = \left(\frac{1}{a}, \frac{-k1}{b}, \frac{-1}{c} \right)$$

estos vectores nunca son paralelos, los dos planos se cortan en una recta que está contenida en la superficie y cuya dirección puede obtenerse mediante el producto cruz de los vectores normales. Cuando elegimos un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ en el hiperbolóide de un manto, la sustitución de ese punto en la ecuación determina el valor de k y de los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$.

Ejemplo Encuentre las dos rectas que pasan por el punto $P = (0, 2, \sqrt{3})$ y contenidas en el hiperbolóide de un manto

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

Solución Escribimos la ecuación

$$x^2 - z^2 = 1 - y^2$$

al considerarlas como diferencias de cuadrados entonces obtenemos

$$(x+z)(x-z) = k(1+y)\left(\frac{1}{k}(1-y)\right), \quad k \neq 0$$

Tenemos el sistema de ecuaciones

$$x + z - k(1+y) = 0$$
$$x - z - \frac{1}{k}(1-y) = 0$$

que corresponden a un par de planos cuyos vectores normales son

$$(1, -k, 1), \quad \left(1, \frac{1}{k}, -1\right)$$

que al no ser paralelos, se intersectan en una recta, cuya dirección se obtiene con el producto cruz de los vectores normales

$$(1, -k, 1) \times \left(1, \frac{1}{k}, -1\right) = \left(k - \frac{1}{k}, 2, \frac{1}{k} + k\right)$$

Ahora bien para obtener k evaluamos en el punto $P = (0, 2, \sqrt{3})$ en cualquier ecuación del sistema

$$x + z - k(1+y) = 0 \;\Rightarrow\; 0 + \sqrt{3} - k(1+2) = 0 \;\Rightarrow\; k = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

entonces el vector de dirección corresponde a

$$\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, 2, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

y por tanto la recta de la primera familia que contiene al punto $P = (0, 2, \sqrt{3})$ es

$$\left\{(x, y, z) = (0, 2, \sqrt{3}) + t\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, 2, \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

Ahora bien, para la segunda familia de rectas consideramos el sistema de ecuaciones

$$x + z - \frac{1}{k}(1 - y) = 0$$

$$x - z - k(1 + y) = 0$$

que corresponden a un par de planos cuyos vectores normales son

$$\left(1, \frac{1}{k}, 1\right), \quad (1, -k, -1)$$

que al no ser paralelos, se intersectan en una recta, cuya dirección se obtiene con el producto cruz de los vectores normales

$$\left(1, \frac{1}{k}, 1\right) \times (1, -k, -1) = \left(k - \frac{1}{k}, 2, -\frac{1}{k} - k\right)$$

Ahora bien para obtener k evaluamos en el punto $P = (0, 2, \sqrt{3})$ en cualquier ecuación del sistema

$$x + z - \frac{1}{k}(1 - y) = 0 \ \Rightarrow \ 0 + \sqrt{3} - \frac{1}{k}(1 - 2) = 0 \ \Rightarrow \ k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

entonces el vector de dirección corresponde a

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

y por tanto la recta de la segunda familia que contiene al punto $P = (0, 2, \sqrt{3})$ es

$$\left\{(x, y, z) = (0, 2, \sqrt{3}) + t\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2, \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \ \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$