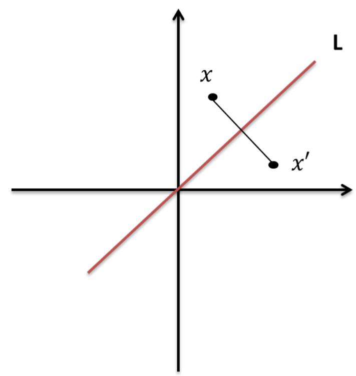
Transformaciones Lineales: Definición y Ejemplos parte dos

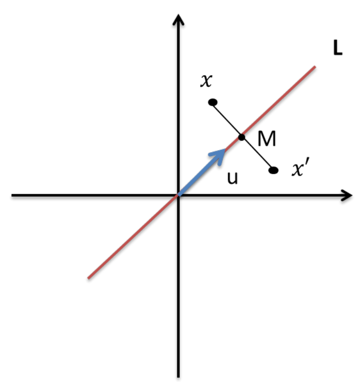
Ejemplo Reflexión: Dado un punto x se tiene que x' es una reflexión de x con respecto a una recta L si:

(1) $\overline{xx'} \perp L$



(2) La intersección M de $\overline{xx'}$ con L es punto punto medio de $\overline{xx'}$, es decir

$$M = \frac{1}{2}(x + x')$$



de donde

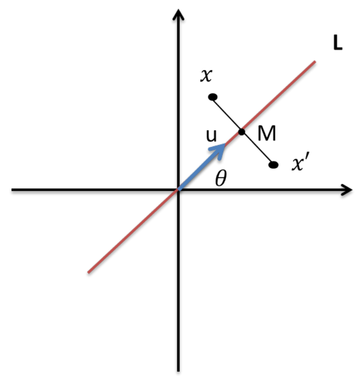
$$x' = 2M - x$$

Por otro lado si u es un vector unitario en la dirección de la recta L, entonces la proyección de x sobre el vector u es

$$P_u(x) = \frac{x \cdot u}{\|u\|^2} u$$

Si u es un vector unitario que forma un ángulo θ con el eje X entonces

$$u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$



y por tanto

$$\begin{aligned} P_u(x,y) &= \frac{(x,y)\cdot(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)}{\|(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)\|^2}(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta) \\ &= (x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta) \\ &= (x\cos^2\theta + y\operatorname{sen}\theta\cos\theta, x\cos\theta\operatorname{sen}\theta + y\operatorname{sen}^2\theta) \end{aligned}$$

sustituyendo en

$$x' = 2M - x$$

se tiene

$$\begin{aligned} (x',y') &= (2x\cos^2\theta + 2y\operatorname{sen}\theta\cos\theta, 2x\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 2y\operatorname{sen}^2\theta) - (x,y) \\ &= (2x\cos^2\theta + 2y\operatorname{sen}\theta\cos\theta - x, 2x\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 2y\operatorname{sen}^2\theta - y) \\ &= (x(2\cos^2\theta - 1) + y(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta), (2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)x + y(2\operatorname{sen}^2\theta - 1)) \\ &= (x\cos(2\theta) + y\operatorname{sen}(2\theta), x\operatorname{sen}(2\theta) - y\cos(2\theta)) \\ &= x(\cos(2\theta),\operatorname{sen}(2\theta)) + y(\operatorname{sen}(2\theta), -\cos(2\theta)) \end{aligned}$$

visto como matrices

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \operatorname{sen}(2\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matriz Asociada a una Transformacion Lineal

En seguida se muestra cómo se construye la matriz de una transformación lineal cuando se especifican las bases en el dominio y el contradominio de una tal transformación.
Sean V y U dos espacios vectoriales de dimensión finita, dígase $\dim V = n$ y $\dim U = m$.
Tómese bases β_1 de V y β_2 de U

$$\beta_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

$$\beta_2 = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$$

Sea $T : V \to U$ una transformación lineal entre estos espacios.
Para el vector $v \in V$ existen escalares $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$$

Es decir,

$$[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La imagen de v bajo T es el vector

$$T(v) = T(x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2) + \cdots + x_nT(v_n) = \sum_{j=1}^{n} x_jT(v_j)$$

Cada vector $T(v_j), \quad j = 1, ..., n$ se encuentra en U, de modo que existen escalares $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}$ tales que

$$T(v_j) = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \cdots + a_{mj}u_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i, \quad j = 1, ..., n$$

Es decir,

$$[T(v_j)]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad j = 1, ..., n$$

Tenemos entonces que

$$\sum_{j=1}^{n} x_jT(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ju_i$$

donde

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{v}$$

A es la matriz asociada a la transformación lineal