La Matriz de una Transformación Lineal respecto a una base

Si V y U son dos espacios vectoriales y $T : V \to U$ es una transformción lineal, dadas bases

$$\beta_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \quad \beta_1 \in V$$

$$\beta_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, \quad \beta_2 \in U$$

Para el vector $v_j \in V, \ \ j = 1, ..., n$ existen escalares $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que

$$v_j = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$$

ya comprobamos que la matriz de columnas

$$T(v_j) \underbrace{=}_{\beta_1} \begin{bmatrix} T(x_1 v_1) \\ T(x_2 v_2) \\ \vdots \\ T(x_n v_n) \end{bmatrix}$$

expresados en coordenadas respecto a la base U

$$T(v_j) \underbrace{=}_{\beta_1} \begin{bmatrix} T(x_1 v_1) \\ T(x_2 v_2) \\ \vdots \\ T(x_n v_n) \end{bmatrix} \underbrace{=}_{\beta_2} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{v}$$

esto permite obtener la imagen de $v_j \in V$ bajo T con solo multiplicar la matriz A por el vector columna de las coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ de $v_j \in V$ bajo la base β_1 de V

Ejemplo Para la homotecia de razón k en $\mathbb{R}^2$, dada por

$$H_k(x, y) = (kx, ky)$$

consideremos la base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\beta_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y tenemos entonces

$$H_k(1, 0) = (k, 0), \quad H_k(0, 1) = (0, k)$$

por lo que la matriz A_{H_k} de homotecia es

$$A_{H_k} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

de esta manera podemos obtener la imagen de cada elemento del dominio, es decir si $(3, 2) \in \mathbb{R}^2$ entonces su imagen es:

$$H_k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k \\ 2k \end{pmatrix}$$

Ejemplo Para la rotación en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen por un ángulo θ

$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$$

consideremos la base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\beta_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ y tenemos entonces

$$R_\theta(1,0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), \quad R_\theta(0,1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

por lo que la matriz A_{R_θ} de rotación un ángulo θ es

$$A_{R_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

de esta manera podemos obtener la imagen de cada elemento del dominio, es decir si $(3,2) \in \mathbb{R}^2$ entonces su imagen bajo la rotación en un ángulo $\dfrac{\pi}{2}$ es:

$$R_{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo Considérese las transformaciones $T_1,\ T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$T_1(x,y) = (3x+2y, 5x-y)$$

$$T_2(x,y) = (-4x+5y, -x+7y)$$

La suma de T_1 y T_2 es la transformación $T_1 + T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$(T_1+T_2)(x,y) = T_1(x,y) + T_2(x,y)$$

$$= (3x+2y, 5x-y) + (-4x+5y, -x+7y)$$
$$= (-x+7y, 4x+6y)$$

Ahora bien si se toma la base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\beta_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, se tiene

$$T_1 + T_2(x,y) = (-x+7y, 4x+6y) \ \Rightarrow \ T_1 + T_2(1,0) = (-4,-1)$$

$$T_1 + T_2(x,y) = (-x+7y, 4x+6y) \ \Rightarrow \ T_1 + T_2(0,1) = (5,7)$$

se tiene entonces

$$A_{T_1+T_2} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Ahora bien si se toma la base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\beta_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, se tiene

$$T_1(x,y) = (3x+2y, 5x-y) \ \Rightarrow \ T_1(1,0) = (3,5)$$

$$T_1(x,y) = (3x+2y, 5x-y) \ \Rightarrow \ T_1(0,1) = (2,-1)$$

de manera que

$$A_{T_1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Para T_2 se toma la base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\beta_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, se tiene

$$T_2(x,y) = (-4x+5y, -x+7y) \;\Rightarrow\; T_1(1,0) = (-4,-1)$$

$$T_2(x,y) = (-4x+5y, -x+7y) \;\Rightarrow\; T_1(0,1) = (5,7)$$

de manera que

$$A_{T_2} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$A_{T_1+T_2} = A_{T_1} + A_{T_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

De manera que $A_{T_1+T_2} = A_{T_2} + A_{T_1}$

Ejemplo Considérese las transformaciones $T_1,\ T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$T_1(x,y) = (ax+by, cx+dy)$$

$$T_2(x,y) = (ex+fy, gx+hy)$$

La composición de T_1 y T_2 es la transformación $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T_2 \circ T_1(x,y) = T_2(ax+by, cx+dy) = (e(ax+by) + f(cx+dy), g(ax+by) + h(cx+dy))$$

$$= (eax + eby + fcx + fdy, gax + gby + hcx + hdy)$$

$$= ((ea+fc)x + (eb+fd)y, (ga+hc)x + (gb+hd)y)$$

Por otro lado

$$A_{T_2} \cdot A_{T_1} = \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

De manera que $A_{T_2 \circ T_1} = A_{T_2} \cdot A_{T_1}$

Si una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se puede representar con una matriz A_T

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_T X$$

y si existe la matriz inversa de A_T^{-1} se tiene entonces

$$A_T X = B \;\Rightarrow\; A_T^{-1} A_T X = A_T^{-1} B$$

$$\Rightarrow\; X = A_T^{-1} B$$

se tiene entonces que la matriz asociada a la transformación inversa T^{-1} de T es $A_{T^{-1}}$ que resulto ser la inversa de la matriz asociada a la transformación T, es decir

$$A_{T^{-1}} = A_T^{-1}$$