Subespacios Invariantes bajo Transformaciones Lineales

Ejemplo Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (2x + y, 3x + 4y)$$

Se tiene entonces que

$$T(1, 3) = (5, 15) = 5(1, 3)$$

con matrices se expresa

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

en este caso se tiene que $T(x, y) = 5(x, y)$, es decir la transformación lineal preservo la dirección, vamos a determinar que direcciones permanecen invariantes bajo una transformación lineal.

Definición 1. *Si $T : V \to V$ es una transformación lineal, decimos que $v \in V$ es un vector característico de T si su transformado es multiplo del vector, es decir, si para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$T(v) = \lambda V$$

El escalar λ se denomina valor característico de T.

Proposición 1. *Si $v \in V$ es un vector característico de una transformación lineal, cualquier multiplo de v es también vector característico de T con el mismo valor característico de v.*

Demostración. Si $v \in V$ es un vector característico de T entonces $T(v) = \lambda v$, por otro lado

$$T(\mu v) = \mu T(v) = \mu\lambda(v) = \lambda(\mu v)$$

por lo tanto μv es un vector característico de T. □

Definición 2. *La recta generada por un vector característico de una transformación lineal $T : V \to V$, se denomina subespacio T-invariante*

A continuación vamos a dar un procedimiento para hallar los elementos invariantes de una tranformación lineal dada.
(1) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Si $v \in V$ es un vector característico de T, entonces

$$T(v) = \lambda v$$

(2) Se puede escribir

$$T(v) - \lambda I v = 0$$

(3) Si A es la matriz asociada a la transformación, entonces podemos escribir

$$Av - \lambda I v = 0$$

$$\Rightarrow\ (A - \lambda I)v = 0$$

(4) Ésta última expresión se puede pensar como un sistema homogéneo de ecuaciones, es decir

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 0$$

esto es

$$\begin{gathered} (a_{11}-\lambda)v_1 + \cdots + a_{1n}v_n = 0 \\ a_{21} + (a_{22}-\lambda)v_2 + \cdots + a_{2n}v_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} + \cdots + (a_{nn}-\lambda)v_n = 0 \end{gathered}$$

El cual siempre tiene la solución $v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0$.
(5) Otra solución ocurriría si

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

que al desarrollar se obtiene un polinomio de grado n en λ, cuyas soluciones nos dan el valor de λ.
Este polinomio se denomina polinomio característico de A y puede o no tener raíces reales, cada una de ellas permitirá determinar un vector propio en V a partir del sistema, necesariamente dependiente, que resulta de sustituir cada raíz en las ecuaciones lineales homogéneas.

Ejemplo Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

se tiene entonces que

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{vmatrix} 5-\lambda & 9 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(2-\lambda) - 18 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda - 8 \\ &= (\lambda - 8)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

por tanto

$$p(\lambda) = 0 \iff (\lambda - 8)(\lambda + 1) = 0 \iff \lambda = 8, \quad \lambda = -1$$

de manera que $\lambda = 8, \quad \lambda = -1$ son los valores característicos de A, y los vectores característicos de A se calculan sustituyendo los valores de λ en el sistema

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 9 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en este caso para $\lambda = 8$ se tiene

$$\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -3x+9y&=0\\ 2x-6y&=0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $x=3r$, $y=r$ con $r\in\mathbb{R}$.
Entonces los vectores característicos asociados al valor $\lambda=8$ son los de la forma

$$(3r,r),\quad r\in\mathbb{R}$$

Ahora bien para $\lambda=-1$ se tiene

$$\begin{pmatrix}6&9\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 6x+9y&=0\\ 2x+3y&=0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $x=-\dfrac{3}{2}$, $y=r$ con $r\in\mathbb{R}$.
Entonces los vectores característicos asociados al valor $\lambda=-1$ son los de la forma

$$\left(-\frac{3}{2}r,r\right),\quad r\in\mathbb{R}$$