Definición y Ejemplos de Transformaciones Rígidas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Dada una rotación en el plano con respecto al origen un ángulo θ vamos a encontrar sus subespacios invariantes, sabemos que la matriz asociada a una rotación es

$$A_{R_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

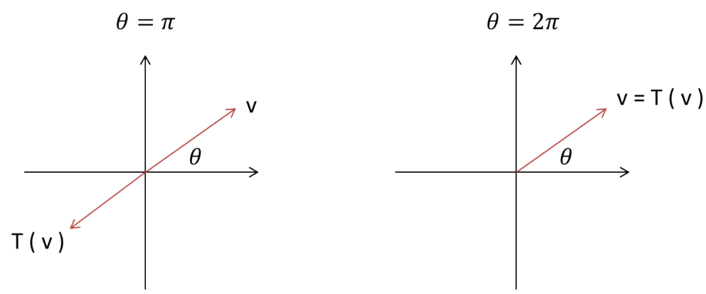
en este caso para hallar sus vectores característicos, se tiene que resolver el polinomio característico

$$p(\lambda) = \det \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$$

Éste polinomio tiene solución sólo si $\theta = \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ y las raíce son $-1, 1$ dependiendo de la paridad de k, es decir, si el ángulo de rotación es de una o varias vueltas todos los vectores quedan fijos, mientras que si el giro es de media vuelta, cada vector (x, y) se transforma en su opuesto $(-x, -y)$. Ahora bien en el caso de las rotaciones además se tiene que

$$\|T(x, y)\| = \|(x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)\| = \|(x, y)\|$$

es decir la invarianza no sólo se da en la dirección, también se da en su norma (tamaño)



Ejemplo Dada una reflexión en el plano con respecto a una recta al origen que forma un ángulo θ con respecto al eje X, vamos a encontrar sus subespacios invariantes, sabemos que la matriz asociada a una reflexión es

$$A_{R_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\ 2\theta & \operatorname{sen}\ 2\theta \\ \operatorname{sen}\ 2\theta & -\cos\ 2\theta \end{pmatrix}$$

en este caso para hallar sus vectores característicos, se tiene que resolver el polinomio característico

$$p(\lambda) = \det \begin{vmatrix} \cos\ 2\theta - \lambda & \operatorname{sen}\ 2\theta \\ \operatorname{sen}\ 2\theta & -\cos\ 2\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\ 2\theta - \lambda)((-\cos\ 2\theta) - \lambda) - \operatorname{sen}^2\ 2\theta = -(\cos^2 - \lambda^2) - -\operatorname{sen}^2\ 2\theta$$

$$= \lambda^2 - 1$$

Éste polinomio tiene solución $-1, 1$. Los vectores propios correspondientes a uno de estos valores propios se obtiene al sustituir en el sistema

$$\begin{aligned} (\cos\ 2\theta - \lambda)x + (\operatorname{sen}\ 2\theta)y &= 0 \\ (\operatorname{sen}\ 2\theta)x + ((-\cos\ 2\theta) - \lambda)y &= 0 \end{aligned}$$

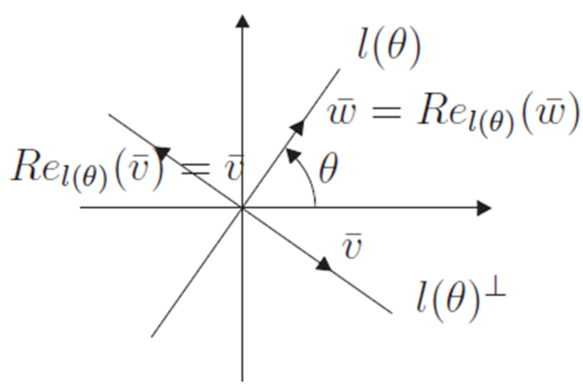
como el sistema es dependiente, basta resolver una de las ecuaciones, por ejemplo en la primera con $\lambda = 1$

$$
\begin{aligned}
(\cos\ 2\theta - 1)x + (\operatorname{sen}\ 2\theta)y &= 0 \\
\Rightarrow\ (\operatorname{sen}\ 2\theta)y &= -(\cos\ 2\theta - 1)x \\
\frac{y}{x} &= \frac{(1-\cos\ 2\theta)}{(\operatorname{sen}\ 2\theta)} \\
&= \frac{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta))}{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta} \\
&= \frac{2\operatorname{sen}^2\theta}{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta} \\
&= \tan\theta
\end{aligned}
$$

esto es, los vectores en la recta reflexión quedan fijos.
En la primera con $\lambda = -1$

$$
\begin{aligned}
(\cos\ 2\theta + 1)x + (\operatorname{sen}\ 2\theta)y &= 0 \\
\Rightarrow\ (\operatorname{sen}\ 2\theta)y &= -(\cos\ 2\theta + 1)x \\
\frac{y}{x} &= \frac{(-1-\cos\ 2\theta)}{(\operatorname{sen}\ 2\theta)} \\
&= \frac{(-\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta - (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta))}{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta} \\
&= -\frac{2\cos^2\theta}{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta} \\
&= -\cot\theta
\end{aligned}
$$

esto es, los vectores de la recta perpendicular a la de reflexión se transforman cada uno en su opuesto



Ahora bien en el caso de las refexiones además se tiene que

$$\|T(x,y)\| = \|(x\cos\ 2\theta + y\operatorname{sen}\ 2\theta, x\operatorname{sen}\ 2\theta - y\cos\ 2\theta)\| = \|(x,y)\|$$

es decir la invarianza no sólo se da en la dirección, también se da en su norma (tamaño)

Ejemplo Dada una transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} - \lambda)[(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda)] - a_{12}[a_{21}(a_{33} - \lambda) - a_{31}a_{23}] + a_{13}[a_{21}a_{32} - a_{31}(a_{22} - \lambda)]$$

La expresión anterior es un polinomio real de tercer grado, así que debe tener al menos una raíz real λ, esta da un valor propio y a esta corresponde al menos un vector propio de la matriz, que da una dirección invariante.
Si hay dos vectores no paralelos V_1 y V_2 que se estiran por el mismo factor ? , entonces todas las combinaciones lineales de V_1 y V_2 se estiran por ese mismo factor, así que todas las direcciones del plano generado por V_1 y V_2 son invariantes.
Si para cada λ solo hay una dirección que se estira por el factor λ, entonces como hay a lo mas 3 valores de λ debe haber a lo mas 3 direcciones invariantes.

A las transformaciones $T : V \to V$ que respetan distancias se les llama transformaciones rígidas

Definición 1. *Una transformación rígida en un espacio vectorial V, es una transformación que respeta las distancias entre puntos. Es decir*

$$d(P, Q) = d(T(P), T(Q))$$

Ejemplo Consideremos la transformación traslación por un vector fijo $\overline{a}$ y que esta definida

$$T_{\overline{a}}(\overline{v}) = \overline{v} + \overline{a}$$

en este caso se tiene que dados dos vectores $v_1, v_2 \in V$

$$d(T_{\overline{a}}(v_1), T_{\overline{a}}(v_2)) = \|T_{\overline{a}}(v_1) - T_{\overline{a}}(v_2)\| = \|v_1 + \overline{a} - (v_2 + \overline{a})\| = \|v_1 - v_2\| = d(v_1, v_2)$$