Definición y Ejemplos de Transformaciones Rígidas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo Dada una rotación en un ángulo θ alrededor del origrn , sabemos que la matriz asociada es

$$A_{R_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\ \theta & -\operatorname{sen}\ \theta \\ \operatorname{sen}\ \theta & \cos\ \theta \end{pmatrix}$$

Ahora bien en el caso de las rotaciones además se tiene que

$$\|T(x,y)\| = \|(x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)\| = \|(x,y)\|$$

es decir la invarianza no sólo se da en la dirección, también se da en su norma (tamaño)

Ejemplo Dada una reflexión en el plano con respecto a una recta al origen que forma un ángulo θ con respecto al eje X, sabemos que la matriz asociada es

$$A_{R_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\ 2\theta & \operatorname{sen}\ 2\theta \\ \operatorname{sen}\ 2\theta & -\cos\ 2\theta \end{pmatrix}$$

Ahora bien en el caso de las refexiones además se tiene que

$$\|T(x,y)\| = \|(x\cos\ 2\theta + y\operatorname{sen}\ 2\theta, x\operatorname{sen}\ 2\theta - y\cos\ 2\theta)\| = \|(x,y)\|$$

es decir la invarianza no sólo se da en la dirección, también se da en su norma (tamaño)

Proposición 1. *Toda transformación que preserva distancias debe preservar ángulos*

Demostración. Si la transformación preserva las normas de dos vectores y la norma de su diferencia se tiene que para $v_1,\ v_2 \in V$

$$\|v_1 - v_2\| = \|T(v_1) - T(v_2)\|$$

y por ley de cosenos

$$\|v_1 - v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 - 2\|v_1\|\|v_2\|\cos\theta_1$$

$$\|T(v_1) - T(v_2)\|^2 = \|T(v_1)\|^2 + \|T(v_2)\|^2 - 2\|T(v_1)\|\|T(v_2)\|\cos\theta_2$$

por lo tanto

$$\theta_1 = \theta_2$$

□

A las transformaciones $T : V \to V$ que respetan distancias y ángulos se les llama transformaciones rígidas (o isometrías)

Definición 1. *Una transformación rígida en un espacio vectorial V, es una transformación que respeta las distancias entre puntos. Es decir*

$$d(P,Q) = d(T(P), T(Q))$$

Ejemplo Consideremos la transformación traslación por un vector fijo $\overline{a}$ y que esta definida

$$T_{\overline{a}}(\overline{v}) = \overline{v} + \overline{a}$$

en este caso se tiene que dados dos vectores $v_1, v_2 \in V$

$$d(T_{\overline{a}}(v_1), T_{\overline{a}}(v_2)) = \|T_{\overline{a}}(v_1) - T_{\overline{a}}(v_2)\| = \|v_1 + \overline{a} - (v_2 + \overline{a})\| = \|v_1 - v_2\| = d(v_1, v_2)$$

Ejemplo Consideremos la transformación identidad dada por

$$T(v) = v$$

en este caso para $v_1,\ v_2 \in V$ se tiene

$$d(T(v_1), T(v_2)) = \|T(v_1) - T(v(2)\| = \|v_1 - v(2)\| = d(v_1, v_2)$$

De la definición de transformación rígida se puede comprobar que éstas son inyectivas

Proposición 2. *Las transformaciones rígidas son inyectivas*

Demostración. Dado un espacio vectorial V y $T : V \to V$ una transformación rígida se tiene que para $v_1, v_2 \in V$ tal que

$$T(v_1) = T(v_2)$$

entonces

$$d(T(v_1), T(v_2)) = 0$$

como T es rígida

$$v_1 = v_2$$

□

Proposición 3. *La composición de dos transformaciones rígidas es una transformación rígida*

Demostración. Dadas dos transformaciones $T_1, T_2 : V \to V$ tal que T_1, T_2 son rígidas se tiene entonces que

$$\begin{aligned} d(T_2 \circ T_1(P), T_2 \circ T_1(Q)) &= d(T_2(T_1(P)), T_2(T_1(Q))) \\ &= d(T_1(P), T_1(Q)) \\ & d(P, Q) \end{aligned}$$

donde la primera igualdad sólo se debe a la definición de composición de transformaciones, la segunda utiliza la rigidez de T_2, y la tercera utiliza la rigidez de T_1. □

Observación: Como la composición de transformaciones cualesquiera es asociativa, entonces en particular la composición de transformaciones rígidas es asociativa, y también cada transformacion rígida se puede componer con la transformación identidad dejando a ésta invariante.

Proposición 4. *Si T es una transformación rígida y tiene inversa T^{-1}, entonces T^{-1} es rígida*

Demostración. Dados $v_1, v_2 \in V$, se tiene

$$d(T^{-1}(v_1), T^{-1}(v_2)) = d(T(T^{-1}(v_1)), T(T^{-1}(v_2)))$$

pues T es rígida, y como

$$d(T(T^{-1}(v_1)), T(T^{-1}(v_2))) = d(v_1, v_2)$$

entonces T^{-1} es rígida □

Definición 2. *A un conjunto G de transformaciones de un conjunto A se le llama un grupo de transformaciones de A bajo una operación $o : G \times G \to G$ si cumple*

$$\begin{gathered}
(1)\ T_1\ o\ T_2 \in G\ para\ cualesquiera\ T_1,\ T_2 \in G\ \ (cerradura) \\
(2)\ T_1\ 0\ (T_2\ o\ T_3) = (T_1\ 0\ T_2)\ o\ T_3\ para\ cualesquiera\ T_1,\ T_2,\ T_3 \in G\ \ (asociatividad) \\
(3)\ \exists\ Id_T \in G\ \ tal\ \ que\ \ T_1\ o\ Id_T = Id_T\ o\ T_1 = T_1\ \ \forall\ T_1 \in G\ \ (elemento\ neutro) \\
(4)\ \exists\ T_1^{-1} \in G\ \ tal\ \ que\ \ T_1\ o\ T_1^{-1} = T_1^{-1}\ o\ T_1 = Id_T\ \ \forall\ T_1 \in G\ \ (elemento\ inverso)
\end{gathered}$$

Teorema 1. *Las transformaciones rígidas del espacio cartesiano forman un grupo bajo la composición*