Grupos de Transformaciones

Definición 1. *A un conjunto G de transformaciones de un conjunto A se le llama un grupo de transformaciones de A bajo una operación $o : G \times G \to G$ si cumple*

$$(1)\ T_1\ o\ T_2 \in G \text{ para cualesquiera } T_1,\ T_2 \in G \quad (\text{cerradura})$$
$$(2)\ T_1\ 0\ (T_2\ o\ T_3) = (T_1\ 0\ T_2)\ o\ T_3 \text{ para cualesquiera } T_1,\ T_2,\ T_3 \in G \quad (\text{asociatividad})$$
$$(3)\ \exists\ Id_T \in G \text{ tal que } T_1\ o\ Id_T = Id_T\ o\ T_1 = T_1 \quad \forall\ T_1 \in G \quad (\text{elemento neutro})$$
$$(4)\ \exists\ T_1^{-1} \in G \text{ tal que } T_1\ o\ T_1^{-1} = T_1^{-1}\ o\ T_1 = Id_T \quad \forall\ T_1 \in G \quad (\text{elemento inverso})$$

Teorema 1. *Las transformaciones rígidas del espacio cartesiano forman un grupo bajo la composición*

Demostración. Cerradura
Dadas dos transformaciones $T_1, T_2 : V \to V$ tal que T_1, T_2 son rígidas se tiene entonces que

$$\begin{aligned} d(T_2 \circ T_1(P), T_2 \circ T_1(Q)) &= d(T_2(T_1(P)), T_2(T_1(Q))) \\ &= d(T_1(P), T_1(Q)) \\ & d(P, Q) \end{aligned}$$

donde la primera igualdad sólo se debe a la definición de composición de transformaciones, la segunda utiliza la rigidez de T_2, y la tercera utiliza la rigidez de T_1.
Asociatividad
Se tiene que

$$T_1 \circ (T_2 \circ T_3)(P) = T_1 \circ (T_2(T_3(P))) = T_1(T_2(T_3(P)))$$
$$(T_1 \circ T_2) \circ T_3(P) = (T_1 \circ T_2)(T_3(P)) = T_1(T_2(T_3(P)))$$

por lo tanto

$$T_1 \circ (T_2 \circ T_3)(P) = (T_1 \circ T_2) \circ T_3(P)$$

y segun el inciso anterior la composición de transformaciones rígidas es rígida
Elemento Neutro
Consideremos la transformación identidad dada por

$$T(v) = v$$

en este caso para $v_1,\ v_2\ \in\ V$ se tiene

$$d(T(v_1), T(v_2)) = \|T(v_1) - T(v(2)\| = \|v_1 - v(2)\| = d(v_1, v_2)$$

por lo tanto ésta transformación es rígida y como la composición de transformaciones rígidas es rígida y la identidad deja fija a la transformación con la que se componga, entonces el conjunto de transformaciones rígidas tiene un elemento neutro
Elemento Inverso
Si T es una transformación rígida y tiene inversa T^{-1}, entonces dados $v_1, v_2 \in V$, se tiene

$$d(T^{-1}(v_1), T^{-1}(v_2)) = d(T(T^{-1}(v_1)), T(T^{-1}(v_2)))$$

pues T es rígida, y como

$$d(T(T^{-1}(v_1)), T(T^{-1}(v_2))) = d(v_1, v_2)$$

entonces T^{-1} es rígida
Por lo tanto el conjunto de transformaciones rígidas son un grupo bajo la composición □

Teorema 2. *Las rotaciones en torno al origen forman un grupo conmutativo respecto a la composición*

Demostración. Cerradura
Dadas dos rotaciónes $T_\phi,\ T_\theta$ en el plano con respecto al origen en ángulos $\phi,\ \theta$ respectivamente, sabemos que tienen matrices asociadas

$$A_{R_\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix},\quad A_{R_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

como la coomposición de transformaciones $T_\phi \circ T_\theta$ es el producto de matrices, se tiene que la composición tiene asociada la matriz

$$A_{R_\phi} \cdot A_{R_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & -\cos\phi\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\cos\theta + \cos\phi\operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\theta & -\operatorname{sen}\phi\theta \\ \operatorname{sen}\phi\theta & \cos\phi\theta \end{pmatrix}$$

matriz que corresponde a una rotación alrededor del origen por el ángulo $\phi+\theta$ y como $\phi+\theta = theta+\phi$ entonces la composición es conmutativa.
Asociatividad
Dadas tres rotaciones alrededor del origen cuyas matrices asociadas son A,B,C. Dado que la composición de transformaciones es el producto de matrices, basta con comprobar que el producto de matrices es asociativo.

Teorema 3. *Sean A,B,C tres matrices de ordenes tales que las operaciones indicadas tienen sentido. Entonces*
(1) A(BC)=(AB)C

Demostración.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix},\ A \in\ M_{m\times p}\quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pr} \end{pmatrix},\ B \in\ M_{p\times r},\quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rn} \end{pmatrix},\ B \in\ M_{r\times n}$$

para (1) tomamos el k-ésimo renglon de la matriz B y lo multiplicamos por la j-ésima columna de C

$$b_{k1}c_{1j} + b_{k2}c_{2j} + \cdots + b_{kr}c_{rj} = \sum_{s=1}^{r} b_{ks}c_{sj} = \beta_{kj}$$

tenemos entonces que β_{kj} es un elemento de la matriz (BC) que vamos a multiplicar por el i-ésimo renglon de la matriz A

$$a_{i1}\beta_{ij} + a_{i2}\beta_{2j} + \cdots + a_{ip}\beta_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\beta_{kj} = \theta_{ij}$$

Entonces

$$\theta_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \sum_{s=1}^{r} b_{ks}c_{sj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{r} a_{ik}b_{ks}c_{sj}$$

Por otra parte un elemento (AB)C se puede obtener multiplicando el i-ésimo renglon de A por la s-ésima columna de B

$$a_{i1}b_{1s} + a_{i2}b_{2s} + \cdots + a_{ip}b_{ps} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{ks} = \alpha_{is}$$

esto lo vamos a multiplicar por la j-ésima columna de la matriz C

$$\alpha_{i1}c_{1j} + \alpha_{i2}c_{2j} + \cdots + \alpha_{ir}c_{rj} = \sum_{s=1}^{r} \alpha_{is}c_{sj} = \rho_{ij}$$

se tiene entonces

$$\rho_{ij} = \sum_{s=1}^{r} \alpha_{is}c_{sj} = \sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{ks}c_{sj} = \theta_{ij}$$

□

Elemento Neutro
Consideremos la rotación por un ángulo cero cuya matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} \cos 0 & -\operatorname{sen} 0 \\ \operatorname{sen} 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es la matriz identidad, la cual deja fijo cualquier vector.
Elemento Inverso
Al componer la rotación por el ángulo $-\theta$ con la rotación por el ángulo θ, resulta la rotación por el ángulo cero, que es el nestro para la composición de rotaciones

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos -\theta & -\operatorname{sen} -\theta \\ \operatorname{sen} -\theta & \cos -\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

por lo tanto el conjunto de rotaciones en torno al origen forman un grupo con respecto a la composición y como además la composición en este caso es conmutativa entonces el grupo es conmutativo.