Descomposición de una Transformación Rígida como una Ortogonal seguida de una Traslación

Ejercicio Pruebe que si $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es una transformación rígida entonces T preserva el producto interior, es decir si $P,Q\in\mathbb{R}^2$ entonces

$$T(P)\cdot T(Q)=P\cdot Q$$

Solución En este caso si T es rígida

$$\|T(P)-T(Q)\|=\|P-Q\|$$

por lo que

$$\begin{aligned}\|T(P)-T(Q)\|^2&=\|P-Q\|^2\\ \Rightarrow\ \|T(P)\|^2-2T(P)\cdot T(Q)+\|T(Q)\|^2&=\|P\|^2-2P\cdot Q+\|Q\|^2\\ \Rightarrow\ T(P)\cdot T(Q)&=P\cdot Q\end{aligned}$$

Ejercicio Pruebe que si $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es una transformación rígida entonces

$$T(P+Q)=T(P)+T(Q)$$

Solución Se tiene que

$$\begin{aligned}\|T(P+Q)-(T(P)+T(Q))\|^2&=\|T(P+Q)\|^2-2T(P+Q)\cdot(T(P)+T(Q))+\|T(P)+T(Q)\|^2\\ &=\|P+Q\|^2-2(P+Q)\cdot(P+Q)+\|P+Q\|^2\\ &=2\|P+Q\|^2-2\|P+Q\|^2\\ &=0\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|T(P+Q)-(T(P)+T(Q))\|^2=0$$

esto quiere decir que $T(P+Q)-(T(P)+T(Q))=0$ y por tanto

$$T(P+Q)=T(P)+T(Q)$$

Ejercicio Pruebe que si $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es una transformación rígida entonces

$$T(\lambda P)=\lambda T(P)$$

Solución Se tiene que

$$\|T(\lambda P)-\lambda T(P)\|^2=\|T(\lambda P)\|^2-2T(\lambda P)\cdot\lambda T(P)+\|\lambda T(P)\|^2$$

como T es rígida

$$T(\lambda P)\cdot\lambda T(P)=\lambda P\cdot\lambda P=\|\lambda P\|^2$$

por lo tanto

$$\|T(\lambda P)\|^2 - 2T(\lambda P)\cdot\lambda T(P) + \|\lambda T(P)\|^2 = \|\lambda P)\|^2 - 2\|\lambda P\|^2 + \|\lambda P\|^2 = 0$$

por lo que

$$\|T(\lambda P) - \lambda T(P)\|^2 = 0$$

esto quiere decir que

$$T(\lambda P) - \lambda T(P) = 0$$

y por tanto

$$T(\lambda P) = \lambda T(P)$$

Definición 1. *Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Decimos que T es una transformación ortogonal, si para cada $u, v\in\mathbb{R}^2$ se cumple*

$$T(u)\cdot T(v) = u\cdot v$$

Proposición 1. *Si $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es una transformación ortogonal entonces T es una isometría*

Demostración. Sean $u, v\in\mathbb{R}^2$ se tiene entonces

$$\begin{aligned} d(T(u),T(v))^2 &= \|T(u)-T(v)\|^2 \\ &= (T(u)-T(v))\cdot(T(u)-T(v)) \\ &= T(u)\cdot T(u) - 2T(u)\cdot T(v) + T(v)\cdot T(v) \\ &= u\cdot u - 2u\cdot v + v\cdot v \\ &= (u-v)\cdot(u-v) \\ &= \|u-v\|^2 \\ & d(u,v)^2 \end{aligned}$$

por lo tanto T es una isometría. □

Proposición 2. *Si T es ortogonal entonces $T(0) = 0$*

Demostración. Como T es ortogonal entonces T es isometría y se tiene que

$$\|T(u)\| = \|u\| \quad \forall u\in\mathbb{R}$$

por tanto

$$\|T(0)\| = \|0\| = 0$$

lo que implica que

$$T(0) = 0$$

□

Con lo anterior podemos asegurar que las siguientes definiciones son equivalentes
(1) T es una transformación rígida y $T(0) = 0$
(2) T es una transformación ortogonal

Teorema 1. *Cualquier transformación rígida es composición de una traslación con una transformación ortogonal*

Demostración. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación rígida y supongamos que $T(0) = C$. Definimos ahora una transformación

$$U = T_{-c} \circ T$$

donde T_{-c} es una traslación definida como $T(Q) = Q - C$. Se tiene que T_{-c} es rígida y T es por hipótesis rígida y como la composición de transformaciones rígidas es rígida se tiene que la transformación U es rígida.
Se tiene que

$$U(0) = T_{-c} \circ T(0) = T_{-c}(T(0)) = T_{-c}(C) = C - C = 0$$

por lo tanto

$$U(0) = 0$$

por lo tanto U es una transformación ortogonal y como T_{-c} es rígida entonces T_{-c}^{-1} es también rígida por lo que

$$U = T_{-c} \circ T \ \Rightarrow \ T_{-c}^{-1} \circ U = T$$

y en consecuencia la transformación rígida T se puede descomponer como una transformación ortogonal seguida de una traslación.
Además dicha descomposición es única.
Supongamos que

$$T = T_c \circ U, \quad T = T_a \circ U'$$

donde U, U' son ortogonales por tanto $U(0) = U'(0) = 0$ entonces

$$\begin{aligned} a &= 0 + a \\ &= T_a(0) \\ &= T_a(U'(0)) \\ &= T(0) \\ &= T_c(U(0)) \\ &= T_c(0) \\ &= 0 + c \\ &= c \end{aligned}$$

lo que implica que $T_a = T_c$ y por tanto $T_c \circ U = T_a \circ U'$ implica que $U = U'$ $\square$