Transformaciones Afines

Definición 1. *Una transformación del plano $\mathbb{R}^2$ es una función biyectiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que es continua y cuya inversa también es continua.*

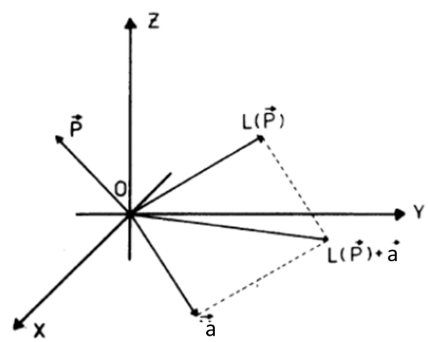
Definición 2. *Transformaciones afines Una transformación afin es la composición de una traslación $T_{\overrightarrow{a}}$ con una transformación lineal L.*

$$A(P) = T_{\overrightarrow{a}} \circ L(P) = L(P) + \overrightarrow{a}$$

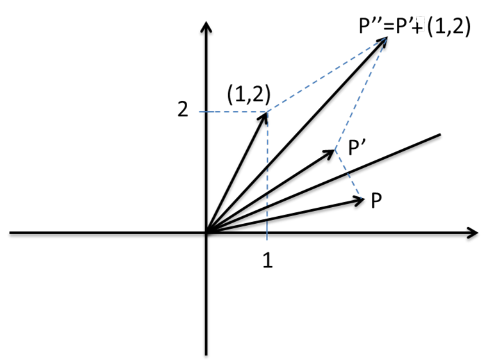
Esto es, si L es una transformación lineal y $\overrightarrow{a}$ un vector fijo, la aplicación que manda cada vector P en el vector

$$P'' = L(P) + \overrightarrow{a}$$

es una transformación afin



Ejemplos Considere la composición de la reflexión respecto a la recta que pasa por el origen formando un ángulo de $\dfrac{\pi}{8}$ respecto al eje X, seguida de la traslación según el vector $(1, 2)$



Esta transformación afin del plano toma un vector $P = (x, y)$, y lo manda al vector $P' = (x', y')$ finalmente lo traslada al vectro $P'' = P' + (1, 2)$. Como las coordenadas de P' vienen dadas por las fórmulas

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + y \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \\ y' &= x \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - y \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

y como P" se obtiene de P' por traslación, las coordenadas de P" son:

$$\begin{aligned} x'' &= x\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + y\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + 1 \\ y' &= x\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - y\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + 2 \end{aligned}$$

Estas son las fórmulas que dan las coordenadas de la imagen de P.

Diremos que dos figuras del plano son afinmente equivalentes si existe una transformación afin del plano que lleve una en la otra.

Definición 3. *Una transformación de $\mathbb{R}^3$ es una función biyectiva $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que es continua y cuya inversa también es continua.*

Definición 4. *Transformaciones afines Una transformación afin es la composición de una traslación $T_{\overrightarrow{a}}$ con una transformación lineal L.*

$$A(P) = T_{\overrightarrow{a}} \circ L(P) = L(P) + \overrightarrow{a}$$

Esto es, si L es una transformación lineal y $\overrightarrow{a}$ un vector fijo, la aplicación que manda cada vector P en el vector

$$P'' = L(P) + \overrightarrow{a}$$

Ejemplos Considere la composición de la reflexión respecto al plano XY seguida de la traslación según el vector $(1,3,2)$. La transformación afin definida por estas aplicaciones toma el vector $P=(x,y,z)$ y lo transforma en el vector P' de coordenadas

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= -z \end{aligned}$$

y como P" se obtiene de P' por traslación, las coordenadas de P" son:

$$\begin{aligned} x'' &= x' + 1 \\ y'' &= y' + 3 \\ z'' &= z' + 2 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} x'' &= x + 1 \\ y'' &= y + 3 \\ z'' &= -z + 2 \end{aligned}$$

Estas son las fórmulas que dan las coordenadas de la imagen de P.

Teorema 1. *Las transformaciones afines forman un grupo, el grupo afin*

Demostración. 1. La composición de dos transformaciones afines es una transformación afin, pues

$$\begin{aligned} A_2 \circ A_1(P) &= (T_{\overrightarrow{a_2}} \circ L_2) \circ (T_{\overrightarrow{a_1}} \circ L_1)(P) \\ &= L_2(L_1(P) + \overrightarrow{a}_1) + \overrightarrow{a}_2 \\ &= L_2 \circ L_1(P) + (L_2(\overrightarrow{a}_1) + \overrightarrow{a}_2) \end{aligned}$$

en la expresión anterior la parte lineal es la composición de las partes lineales y el vector de traslación resulta al sumar $\overrightarrow{a}_2$ al vector obtenido al aplicar la transformación L_2 al primer vector de traslación $\overrightarrow{a}_1$

2. La asociatividad es válida para transformaciones cualesquiera
3. La identidad puede escribirse como una transformación afín, si componemos a la traslación por 0 con la identidad
4. La inversa A^{-1} de una transformación afín A es una transformación afín, A^{-1}, que se obtiene así:

$$P' = L(P) + \overrightarrow{a} \;\Rightarrow\; P = L^{-1}(P' - \overrightarrow{a})$$
$$= L^{-1}(P') + L^{-1}(-\overrightarrow{a}) = \left(T_{L^{-1}(-\overrightarrow{a})} \circ L^{-1}\right)(P')$$

□

Nótese que la parte lineal de la transformación inversa es la inversa L^{-1} de la parte lineal L, mientras que la traslación en la transformación A^{-1} corresponde al vector $L^{-1}(-\overrightarrow{a})$

Proposición 1. *Las transformaciones afines preservan rectas, es decir, mandan rectas en rectas*

Demostración. Una recta esta definida como

$$\ell = \{p + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$$

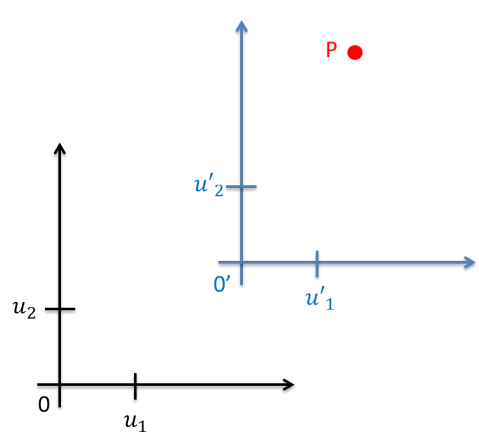
y dada una transformación afin $A = L(p) + \overrightarrow{a}$, se tiene

$$A(p + tv) = L(p + tv) + \overrightarrow{a}$$
$$= L(p) + tL(v) + \overrightarrow{a}$$
$$L(p) + \overrightarrow{a} + tL(v)$$

que es una recta □

Ecuaciones del cambio de referencia afin

Sean $R = \{0; (u_1, u_2)\}$, $R' = \{0; (u_1', u_2')\}$ dos sistemas de referencia afines del plano $\mathbb{R}^2$.
Se considera $P \in \mathbb{R}^2$



tal que

$$\overrightarrow{OP} = x_1u_1 + x_2u_2$$
$$\overrightarrow{O'P} = y_1u_1' + y_2u_2'$$

sabemos que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

Sean (a_1, a_2) las coordenadas de O' respecto de R; esto es

$$\overrightarrow{OO'} = a_1u_1 + a_2u_2$$

y sean (a_{1i}, a_{2i}), $i = 1, 2$ las coordenadas del vector u_i' respecto a (u_1, u_2); esto es

$$u_1' = a_{11}u_1 + a_{21}u_2$$
$$u_2' = a_{12}u_1 + a_{22}u_2$$

Sustituyendo lo anterior en $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$ obtenemos

$$\overrightarrow{OP} = a_1u_1 + a_2u_2 + (y_1u_1' + y_2u_2')$$
$$= a_1u_1 + a_2u_2 + (y_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2) + y_2(a_{12}u_1 + a_{22}u_2))$$
$$= (a_1 + y_1a_{11} + y_2a_{12})u_1 + (a_2 + y_1a_{21} + y_2a_{22})u_2$$

y como

$$\overrightarrow{OP} = x_1u_1 + x_2u_2$$

se tiene

$$x_1 = a_1 + y_1a_{11} + y_2a_{12}$$
$$x_2 = a_2 + y_1a_{21} + y_2a_{22}$$

Matricialmente, el sistema anterior se puede escribir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} \\ a_2 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

donde la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} \\ a_2 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

es la matriz de cambio de referencia de R' a R y por lo tanto la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} \\ a_2 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

es la matriz de cambio de referencia de R a R'.
Dada entonces una transformación afin $A(P)$ podemos decir que si $P' = A(P)$ entonces $P = A^{-1}(P')$, y al sustituir (x, y) en términos de (x', y') en la ecuación de un lugar geométrico original, resulta la ecuación del lugar geométrico transformado.

Ejemplo Aplicando la transformación afin cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

transforme las siguientes ecuaciones
(a) $-x + 2y - 3 = 0$
(b)$y^2 = 4x$

Solución En este caso para la matriz asociada a la transformación afin

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

calculamos su inversa, la cual es

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

al aplicarla a $(1, x', y')$ para obtener $(1, x, y)$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix}$$

donde se obtiene

$$x = 4 - 3x' - y'$$
$$y = 2 - 2x' - y'$$

Vamos ahora a sustituir las expresiones anteriores en las ecuaciones originales, se tiene entonces para (a)

$$\begin{aligned} -x + 2y - 3 &= -(4 - 3x' - y') + 2(2 - 2x' - y') - 3 \\ &= -x' - y' - 3 \end{aligned}$$

por lo tanto la ecuación de la recta transformada queda

$$-x' - y' - 3 = 0$$

para (b)

$$\begin{aligned} y^2 - 4x &= (2 - 2x' - y')^2 - 4(4 - 3x' - y') \\ &= 4x'^2 + y'^2 + 4x'y' + 4x' - 12 \end{aligned}$$

por lo tanto la ecuación de la parábola transformada queda

$$4x'^2 + y'^2 + 4x'y' + 4x' - 12 = 0$$