Rectas y Circunferencias en el Plano Complejo

La ecuación de una recta en el plano es $ax + by + c = 0$. Donde a,b,c$\in \mathbb{R}$ y $a^2 + b^2 \neq 0$. Si $z = x + iy$ entonces

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad y \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

por lo que

$$ax + by + c = 0 \ \Rightarrow \ a\left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right) + b\left(\frac{z - \overline{z}}{2i}\right) + c = 0$$

$$\Rightarrow \ a\frac{z}{2} + a\frac{\overline{z}}{2} - ib\frac{z}{2} + ib\frac{\overline{z}}{2} + c = 0$$

Esto es equivalente a

$$\overline{z}\left(\frac{a + ib}{2}\right) + z\left(\frac{a - ib}{2}\right) + c = 0$$

Sea $\alpha = \dfrac{a - ib}{2} \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $\beta = c \in \mathbb{R}$ entonces la ecuación de la recta es

$$\overline{\alpha z} + \alpha z + \beta = 0$$

Lema 1. *Las soluciones de la ecuación $cz + \overline{cz} = r$ (con c complejo y r real) forman una recta, y todas las rectas tienen ecuaciones de este tipo*

Demostración. Si $c = a + ib$ entonces

$$(a + ib)(x + iy) + (a - ib)(x - iy) = r \ \Rightarrow \ (ax - by) + i(ay + bx) + (ax - by) + i(-ay - bx) = r$$

$$\Rightarrow \ 2ax - 2by = r$$

esta expresión tiene la forma de una ecuación de la recta. □

Ejemplo Hallar la expresión compleja de la ecuación de la recta $2x + 3y = 4$

Solución En este caso

$$2x + 3y = 4 \ \Rightarrow \ 2(1)x - 2\left(-\frac{3}{2}\right)y = 4$$

por lo tanto si $a = 1$ y $b = -\dfrac{3}{2}$ entonces $c = 1 - i\dfrac{3}{2}$ y la expresión compleja de la recta $2x + 3y = 4$ es

$$\left(1 - i\frac{3}{2}\right)z + \left(1 + i\frac{3}{2}\right)\overline{z} = 4$$

La ecuación de una circunferencia con centro (a, b) y de radio r es

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Haciendo, $D = -2a$, $E = -2b$, $F = a^2 + b^2 - r^2$, se tiene que la ecuación general de una circunferencia en el plano cartesiano es

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $D, E, F \in \mathbb{R}$. En base que $D = -2a$, $E = -2b$, F se puede expresar

$$F = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - r^2$$

se puede decir que

$$F < \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$$

Teniendo en cuenta que

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i}, \quad |z|^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2$$

se tiene

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \ \Rightarrow\ |z|^2 + D\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right) + E\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + F = 0$$

$$\Rightarrow\ z\overline{z} + \frac{D}{2}z + \frac{D}{2}\overline{z} - \frac{Ei}{2}z + \frac{Ei}{2}\overline{z} + F = 0$$

$$\Rightarrow\ z\overline{z} + \frac{D}{2}z - \frac{Ei}{2}z + \frac{D}{2}\overline{z} + \frac{Ei}{2}\overline{z} + F = 0$$

$$\Rightarrow\ z\overline{z} + \left(\frac{D}{2} - \frac{Ei}{2}\right)z + \left(\frac{D}{2} + \frac{Ei}{2}\right)\overline{z} + F = 0$$

$$\Rightarrow\ z\overline{z} + \left(\frac{D-Ei}{2}\right)z + \left(\frac{D+Ei}{2}\right)\overline{z} + F = 0$$

Tomando $\alpha = \dfrac{D-Ei}{2} \in \mathbb{C}$ y $\beta = F \in \mathbb{R}$ se tiene la ecuación

$$z\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + \beta = 0$$

El radio de la circunferencia se deduce de

$$F = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - r^2$$

por lo que

$$r = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$$

que en términos de α, β

$$r = \sqrt{\alpha\overline{\alpha} - \beta}$$

tenemos entonces

$$z\overline{z}+\alpha z+\overline{\alpha z}+\beta=0 \Rightarrow z\overline{z}+\alpha z+\overline{\alpha z}+\beta+\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\alpha}=0$$
$$\Rightarrow z\overline{z}+\alpha z+\overline{\alpha z}+\beta+\alpha\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}-\beta$$
$$\Rightarrow (z+\overline{\alpha})(\overline{z}+\alpha)=r^2$$

Lema 2. *Las soluciones de la ecuación $(z+c)\overline{(z+c)}=r$ (con c complejo y r real) forman un círculo, y todos los circulos del plano tienen ecuaciones de esta forma*

Demostración. Si $c=a+ib$ entonces

$$((x+iy)+(a+ib))((x-iy)+(a-ib))=r \Rightarrow ((x+a)+i(y+b))((x+a)-i(y+b))=r$$
$$\Rightarrow (x+a)^2+(y+b)^2=r$$

esta expresión tiene la forma de una ecuación de una circunferencia. □

Ejemplo Hallar la expresión compleja de la ecuación de la circunferencia $(x+2)^2+(y+3)^2=4$

Solución En este caso $a=2$, $b=3$ por lo tanto $c=2+3i$ y la expresión compleja es

$$(z+(2+3i))(\overline{z}+(2-3i))=4$$

Transformaciones del plano complejo

1. Traslaciones Una recta se transforma mediante una traslación, en una recta.
   Tenemos que la ecuación de una recta en forma compleja es

   $$\overline{\alpha z}+\alpha z+\beta=0$$

   Sea $b\in\mathbb{C}$ fija. Sea $T_b(z)=z+b$ por lo que $z'=z+b \Rightarrow z'-b=z$ y sustituimos en la ecuación de la recta

   $$\overline{\alpha z}+\alpha z+\beta=0 \Rightarrow \overline{\alpha}\overline{(z'-b)}+\alpha(z'-b)+\beta=0$$
   $$\Rightarrow \overline{\alpha}(\overline{z'}-\overline{b})+\alpha(z'-b)+\beta=0$$
   $$\Rightarrow \overline{\alpha}\overline{z'}-\overline{\alpha}\overline{b}+\alpha z'-\alpha b+\beta=0$$
   $$\Rightarrow \overline{\alpha}\overline{z'}+\alpha z'-(\overline{\alpha}\overline{b}+\alpha b-\beta)=0$$

   Teniendo en cuenta que

   $$Re(\alpha\ b)=\frac{\overline{\alpha}\overline{b}+\alpha b}{2} \Rightarrow 2\ Re(\alpha\ b)=\overline{\alpha}\overline{b}+\alpha b$$

   se tiene

   $$\overline{\alpha}\overline{z'}+\alpha z'-(\overline{\alpha}\overline{b}+\alpha b-\beta)=0 \Rightarrow \overline{\alpha}\overline{z'}+\alpha z'-(2\ Re(\alpha\ b)-\beta)=0$$

   haciendo $\beta'=-(2\ Re(\alpha\ b)-\beta)$ se tiene

   $$\overline{\alpha}\overline{z'}+\alpha z'-(2\ Re(\alpha\ b)-\beta)=0 \Rightarrow \overline{\alpha}\overline{z'}+\alpha z'+\beta'=0$$

   y esta es la ecuación de una recta

2. Una circunferencia se transforma mediante una traslación, en una circunferencia.
   Tenemos que la ecuación de una circunferencia en forma compleja es

$$z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = r^2$$

Sea $b \in \mathbb{C}$ fija. Sea $T_b(z) = z + b$ por lo que $z' = z + b \ \Rightarrow \ z' - b = z$ y sustituimos en la ecuación de la circunferencia

$$\begin{gathered}
(z' - b)\overline{(z' - b)} + (z' - b)\overline{w} + w\overline{(z' - b)} + w\overline{w} = r^2 \\
\Rightarrow \ (z' - b)(\overline{z'} - \overline{b}) + z'\overline{w} - b\overline{w} + w(\overline{z'} - \overline{b}) + w\overline{w} = r^2 \\
\Rightarrow \ z'\overline{z'} - z'\overline{b} - b\overline{z'} + b\overline{b} + z'\overline{w} - b\overline{w} + w\overline{z'} - w\overline{b} + w\overline{w} = r^2 \\
\Rightarrow \ z'\overline{z'} + z'\overline{w} + w\overline{z'} - (z'\overline{b} + b\overline{z'}) - (b\overline{w} + w\overline{b}) + w\overline{w} = r^2 - b\overline{b} \\
\Rightarrow \ z'\overline{z'} + z'\overline{w} + w\overline{z'} - (z'\overline{b} + b\overline{z'}) - (b\overline{w} + w\overline{b}) + w\overline{w} = r^2 - |b|^2
\end{gathered}$$

Teniendo en cuenta que

$$Re(z' \ \overline{b}) = \frac{z'\overline{b} + \overline{z'}b}{2} \ \Rightarrow \ 2 \ Re(z' \ \overline{b}) = z'\overline{b} + \overline{z'}b$$

$$Re(b \ ) = \frac{b\overline{w} + \overline{b}w}{2} \ \Rightarrow \ 2 \ Re(b \ \overline{w}) = b\overline{w} + b\overline{w}$$

se tiene

$$\begin{gathered}
z'\overline{z'} + z'\overline{w} + w\overline{z'} - (2 \ Re(z' \ \overline{b})) - (2 \ Re(b \ \overline{w})) + w\overline{w} = r^2 - |b|^2 \\
\Rightarrow \ z'\overline{z'} + z'\overline{w} + w\overline{z'} + w\overline{w} = r^2 - |b|^2 + (2 \ Re(z' \ \overline{b})) + (2 \ Re(b \ \overline{w}))
\end{gathered}$$

haciendo $r'^2 = r^2 - |b|^2 + (2 \ Re(z' \ \overline{b})) + (2 \ Re(b \ \overline{w}))$ se tiene

$$\Rightarrow \ z'\overline{z'} + z'\overline{w} + w\overline{z'} + w\overline{w} = r'^2$$

y esta es la ecuación de una circunferencia