Transformaciones de Rectas y Circunferencias en el Plano Complejo

Sabemos de cálculo que la serie de Taylor para las funciones sen(x) y cos(x) son:

$$\cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$$\text{sen}\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+a)!} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

en el caso de la función exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n)!} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Si en esta serie sustituimos x por iy con $y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots$$

tomando en cuenta

$$i^{4q+r} = \begin{cases} 1 & si \quad q = 0 \\ i & si \quad q = 1 \\ -1 & si \quad q = 2 \\ -i & si \quad q = 3 \end{cases}$$

y reordenando

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{(y)^2}{2!} + \frac{(y)^4}{4!} - \frac{(y)^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{(y)^3}{3!} + \frac{(y)^5}{5!} - \frac{(y)^7}{7!} + \cdots\right)$$

es decir,

$$e^{iy} = \cos\ y + i\,\text{sen}\ y$$

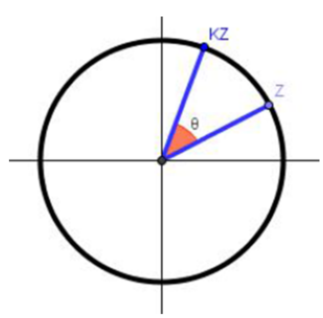
Definiremos las rotaciones en el plano complejo como

$$T_{R_\theta}(z) = e^{i\theta} z$$

esta expresión representara una rotación de ángulo θ y centro en el origen.
Mientras que

$$T_{R_a^\theta}(z) = e^{i\theta} z$$

representara una rotación de ángulo θ y centro en el punto $\overline{a}$.



Teorema 1. *Toda rotación $T_{R_a^\theta}(z)$ centrada en un punto $\overline{a}$ fuera del origen, se puede respresentar por la traslación inversa $T_{-\overline{a}}$ del punto $\overline{a}$ al punto 0, rotando θ alrededor de 0, y la traslación de 0 al punto $\overline{a}$*

Demostración.

$$
\begin{aligned}
T_{R_a^\theta}(z) &= \left(T_{\overline{a}} \circ T_{R_\theta} \circ T_{-\overline{a}}\right)(z) \\
&= T_{\overline{a}}\left(T_{R_\theta} \circ T_{-\overline{a}}(z)\right) \\
&= T_{\overline{a}}\left(T_{R_\theta}(z-a)\right) \\
&= T_{\overline{a}}\left(e^{i\theta}(z-a)\right) \\
& e^{i\theta}(z-a)+a \\
&= e^{i\theta}z + \left(a - ae^{i\theta}\right)
\end{aligned}
$$

haciendo $v = a - ae^{i\theta}$ se tiene

$$= e^{i\theta}z + v$$

Se ha encontrado que la rotación alrededor de cualquier punto puede ser expresada como una rotación alrededor del origen, seguida de una traslación

$$T_{R_a^\theta} = (T_v \circ R_\theta)$$

Recíprocamente, una rotación de ángulo θ y centro en el origen, seguida de una traslación v siempre puede reducirse a una sola transformación en este caso a una rotación

$$
\begin{aligned}
\left(T_v \circ T_{R_\theta}\right)(z) &= T_v\left(T_{R_\theta}(z)\right) \\
& T_v\left(e^{i\theta}(z)\right) \\
&= e^{i\theta}z + v, \quad v = a - ae^{i\theta} \Rightarrow a = \frac{v}{1-e^{i\theta}} \\
&= T_{R_a^\theta}
\end{aligned}
$$

□

Transformaciones del plano complejo

1. Rotaciones Una recta se transforma mediante una rotación (centrada en el origen del plano complejo) en otra recta

   Demostración. En este caso se tiene

   $$
   \begin{aligned}
   T_{R_\theta}(z) &= e^{i\theta}z \\
   &\Rightarrow e^{i\theta}z = z' \\
   &\Rightarrow z = z'e^{-i\theta}
   \end{aligned}
   $$

   Sustituyendo z en la ecuación de la recta

   $$\overline{\alpha z} + \alpha z + \beta = 0 \Rightarrow \overline{\alpha}\overline{z'e^{-i\theta}} + \alpha(z'e^{-i\theta}) + \beta = 0$$

   haciendo $z^\diamond = z'e^{-i\theta}$ se tiene

   $$\overline{\alpha}\overline{z'e^{-i\theta}} + \alpha(z'e^{-i\theta}) + \beta = 0 \Rightarrow \overline{\alpha}\overline{z^\diamond} + \alpha z^\diamond + \beta = 0$$

   que es la ecuación de una recta □

2. Una circunferencia se transforma mediante una rotación (centrada en el origen del plano complejo) en otra circunferencia

   Demostración. En este caso se tiene

$$T_{R_\theta}(z) = e^{i\theta}z$$
$$\Rightarrow\ e^{i\theta}z = z'$$
$$\Rightarrow\ z = z'e^{-i\theta}$$

   Sustituyendo z en la ecuación de la circunferencia

$$z\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + \alpha\overline{\alpha} = r^2$$
$$\Rightarrow\ (z'e^{-i\theta})\overline{z'e^{-i\theta}} + \alpha(z'e^{-i\theta}) + \overline{\alpha}\overline{z'e^{-i\theta}}\alpha\overline{\alpha} = r^2$$

   haciendo $z^\diamond = z'e^{-i\theta}$ se tiene

$$\Rightarrow\ z^\diamond\overline{z^\diamond} + \alpha z^\diamond + \overline{\alpha}\overline{z^\diamond}\alpha\overline{\alpha} = r^2$$

   que es la ecuación de una circunferencia □

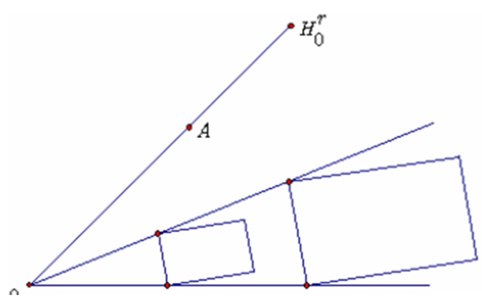
Una homotecia de razón r y centro Q, $T_{H_Q^r}$ es una transformación en el mismo plano P, tal que la imagen de un punto p es p', donde p' se determina vectorialmente por:

$$\overrightarrow{Qp'} = r\overrightarrow{Qp} = r(p - Q)$$

en términos de números complejos

$$T_{H_Q^r}(z) = r(z - Q)$$

La siguiente figura, muestra que el centro es un punto (el origen) fijo y aumente el punto A del segmento $\overline{OA}$ por un factor r, sucede igual con cada punto del cuadrado



En el caso de una homotecia central se tendría

$$T_{H_r}(z) = rz$$

Transformaciones del plano complejo

1. Homotecias Una recta mediante una homotecia se transforma en una recta

   Demostración. Hemos definido algebraicamente una homotecia de la siguiente forma

   $$T_{H_Q^r} = r(z-Q) \;\Rightarrow\; z' = r(z-Q) \;\Rightarrow\; z = \frac{1}{r}z' + Q$$

   Sustituyendo en la ecuación de la recta obtenemos

   $$\overline{\alpha z} + \alpha z + \beta = 0 \Rightarrow \;\overline{\alpha\left(\frac{1}{r}z' + Q\right)} + \alpha\left(\frac{1}{r}z' + Q\right) + \beta = 0$$

   $$\Rightarrow\; \overline{\alpha}\frac{1}{r}\overline{z'} + \overline{\alpha}\overline{Q} + \alpha\frac{1}{r}z' + \alpha Q + \beta = 0$$

   $$\Rightarrow\; \overline{\alpha}\frac{1}{r}\overline{z'} + \alpha\frac{1}{r}z' + \overline{\alpha}\overline{Q} + \alpha Q + \beta = 0$$

   $$\Rightarrow\; \overline{\alpha}\frac{1}{r}\overline{z'} + \alpha\frac{1}{r}z' + 2Re(\alpha Q) + \beta = 0$$

   $$\Rightarrow\; \overline{\alpha}\overline{z'} + \alpha z' + r(2Re(\alpha Q) + \beta) = 0$$

   haciendo $\beta' = r(2Re(\alpha Q) + \beta)$ se tiene

   $$\Rightarrow\; \overline{\alpha}\overline{z'} + \alpha z' + \beta' = 0$$

   que es la ecuación de una recta □

2. Una circunferencia mediante una homotecia se transforma en una circunferencia

   Demostración. Hemos definido algebraicamente una homotecia de la siguiente forma

   $$T_{H_Q^r} = r(z-Q) \;\Rightarrow\; z' = r(z-Q) \;\Rightarrow\; z = \frac{1}{r}z' + Q$$

   Sustituyendo en la ecuación de la circunferencia obtenemos

   $$z\overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha z} + \alpha\overline{\alpha} = r^2$$

   $$\Rightarrow\; \left(\frac{1}{r}z' + Q\right)\overline{\left(\frac{1}{r}z' + Q\right)} + \alpha\left(\frac{1}{r}z' + Q\right) + \overline{\alpha\left(\frac{1}{r}z' + Q\right)} + \alpha\overline{\alpha} = r^2$$

   haciendo $z^{\diamond} = \frac{1}{r}z' + Q$ se tiene

   $$\Rightarrow\; z^{\diamond}\overline{z^{\diamond}} + \alpha z^{\diamond}) + \overline{\alpha}\overline{z^{\diamond}} + \alpha\overline{\alpha} = r^2$$

   que es la ecuación de una circunferencia □