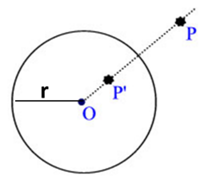
Inversión Geométrica

Se dice que dos puntos son inversos respecto a un circulo dado si
(a) Los puntos están en un mismo radio
(b) El producto de sus distancias al centro es igual al cuadrado del radio del circulo.



$$|OP| \cdot |OP'| = r^2$$

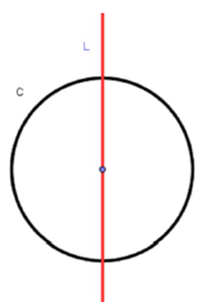
Consideremos la transformación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$T_I(z) = \frac{1}{z}$$

a la cual llamaremos inversión

Transformaciones Complejas

1. Inversión Una recta mediante una inversión se transforma en una recta, si y solo si la recta pasa por el origen



Demostración. Una recta que pasa por el origen tiene una expresión

$$\overline{\alpha z} + \alpha z = 0$$

también se puede escribir

$$\overline{\alpha} z + \alpha \overline{z} = 0$$

ahora bien según la definición de una inversión se tiene

$$T_I(z) = \frac{1}{z} \;\Rightarrow\; z' = \frac{1}{z} \;\Rightarrow\; z = \frac{1}{z'}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta, se obtiene

$$\overline{\alpha z} + \alpha z = 0 \;\Rightarrow\; \overline{\alpha\left(\frac{1}{z'}\right)} + \alpha\left(\frac{1}{z'}\right) = 0$$

$$\Rightarrow\; \overline{\alpha}\left(\frac{1}{\overline{z'}}\right) + \alpha\left(\frac{1}{z'}\right) = 0$$

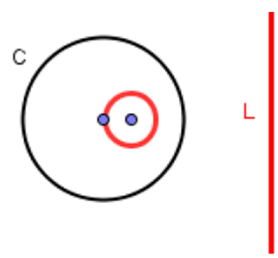
$$\Rightarrow\; \overline{\alpha}\left(\frac{z'}{z'\overline{z'}}\right) + \alpha\left(\frac{\overline{z'}}{\overline{z'}z'}\right) = 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{\overline{\alpha}z' + \alpha\overline{z'}}{|z'|^2} = 0 \qquad |z| \neq 0$$

$$\Rightarrow\; \overline{\alpha}z' + \alpha\overline{z'} = 0$$

que es una recta que pasa por el origen □

2. La imagen por inversión compleja de una recta que no pasa por el origen es una circunferencia que pasa por el origen con su respectivo centro.



Demostración. Una recta que no pasa por el origen tiene una expresión

$$\overline{\alpha z} + \alpha z + \beta = 0$$

o también

$$\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + \beta = 0$$

ahora bien según la definición de una inversión se tiene

$$T_I(z) = \frac{1}{z} \;\Rightarrow\; z' = \frac{1}{z} \;\Rightarrow\; z = \frac{1}{z'}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta, se obtiene

$$\alpha\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} + \overline{\alpha}\left(\frac{1}{z'}\right) + \beta = 0$$

$$\Rightarrow\; \alpha\frac{1}{\overline{z'}} + \overline{\alpha}\frac{1}{z'} + \beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \frac{z'}{z'\overline{z'}} + \overline{\alpha}\frac{\overline{z'}}{z'\overline{z'}} + \beta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha z' + \overline{\alpha}\overline{z'} + \beta z'\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha z' + \overline{\alpha}\overline{z'} + \beta z'\overline{z'} = 0$$

Divido entre β

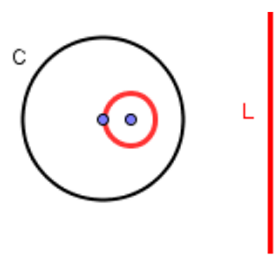
$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) z' + \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\overline{z'} + z'\overline{z'} = 0$$

haciendo $\alpha' = \dfrac{\alpha}{\beta}$ se tiene

$$\Rightarrow \alpha' z' + \overline{\alpha' z'} + z'\overline{z'} = 0$$

que es la ecuación de una circunferencia que pasa por el origen □

3. La imagen por inversión compleja de una circunferencia que pasa por el origen es una recta que no pasa por el origen



Demostración. Una circunferencia que pasa por el origen tiene una expresión

$$z\overline{z} + z\overline{\alpha} + \overline{z}\alpha = 0$$

ahora bien según la definición de una inversión se tiene

$$T_I(z) = \frac{1}{z} \;\Rightarrow\; z' = \frac{1}{z} \;\Rightarrow\; z = \frac{1}{z'}$$

Sustituyendo en la ecuación de la circunferencia, se obtiene

$$\left(\frac{1}{z'}\right)\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} + \left(\frac{1}{z'}\right)\overline{\alpha} + \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}\alpha = 0$$

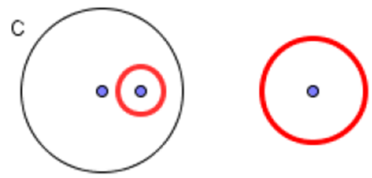
$$\Rightarrow \frac{1}{z'}\frac{1}{\overline{z'}} + \frac{\overline{z'}\overline{\alpha}}{z'\overline{z'}} + \frac{z'\alpha}{z'\overline{z'}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \overline{z'}\overline{\alpha} + z'\alpha}{z'\overline{z'}} = 0 \qquad z'\overline{z'} \neq 0$$

$$\Rightarrow 1 + \overline{z'}\overline{\alpha} + z'\alpha = 0$$

que es la ecuación de una recta que no pasa por el origen □

4. La imagen de una circunferencia que no pasa por el origen es otra circunferencia que no pasa por el origen.



Demostración. Como la circunferencia no pasa por el origen tiene la forma

$$z\overline{z} + z\overline{\alpha} + \overline{z}\alpha + c = 0$$

ahora bien según la definición de una inversión se tiene

$$T_I(z) = \frac{1}{z} \;\Rightarrow\; z' = \frac{1}{z} \;\Rightarrow\; z = \frac{1}{z'}$$

Sustituyendo en la ecuación de la circunferencia, se obtiene

$$\left(\frac{1}{z'}\right)\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} + \left(\frac{1}{z'}\right)\overline{\alpha} + \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}\alpha + c = 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{z'}\frac{1}{\overline{z'}} + \frac{1}{z'}\overline{\alpha} + \frac{1}{\overline{z'}}\alpha + c = 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{z'}\frac{1}{\overline{z'}} + \frac{\overline{z'}}{z'\overline{z'}}\overline{\alpha} + \frac{z'}{z'\overline{z'}}\alpha + c = 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{1 + \overline{z'}\overline{\alpha} + z'\alpha + z'\overline{z'}c}{z'\overline{z'}} = 0$$

$$\Rightarrow\; 1 + \overline{z'}\overline{\alpha} + z'\alpha + z'\overline{z'}c = 0$$

Dividiendo entre c se obtiene

$$z'\overline{z'} + z'\frac{\alpha}{c} + \overline{z'}\frac{\overline{\alpha}}{c} + \frac{1}{c} = 0$$

haciendo $\alpha' = \dfrac{\alpha}{c}$ se obtiene

$$z'\overline{z'} + z'\alpha' + \overline{z'\alpha'} + \frac{1}{c} = 0$$

que es la ecuación de una circunferencia que no pasa por el origen □