Transformaciones de Möbius

Definición 1. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$. La función $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \forall\ z \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

es llamada transformación de Möbius.

Inyectividad La condición $ad - bc \neq 0$ se introduce para que las transformaciones de Möbius sean inyectivas (y por lo tanto no constantes).

Demostración. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $T(z_1) = T(z_2)$, entonces

$$\frac{az_1 + b}{cz_2 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}$$

$$\Rightarrow \ (az_1 + b)(cz_2 + d) = (az_2 + b)(cz_2 + d)$$

$$\Rightarrow \ (ad - bc)(z_1 - z_2) = 0$$

por lo que T sera inyectiva si $ad - bc \neq 0$ □

Caso $ad - bc = 0$ Tenemos que

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a\left(z + \frac{b}{a}\right)}{c\left(z + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c}$$

y la tranformación es constante.

Composición de dos transformaciones de Möbius Tenemos que si

$$T_1(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad y \quad T_2(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

con $ad - bc \neq 0$ y $a'd' - b'c' \neq 0$ respectivamente, entonces

$$(T_2 \circ T_1)(z) = T_2(T_1(z)) = T_2\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{a'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + b'}{c'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + d'}$$

$$= \frac{a'az + a'b + b'cz + b'd}{c'az + c'b + d'cz + d'd} = \frac{(a'a + b'c)z + a'b + b'd}{(c'a + d'c)z + c'b + d'd}$$

Debe cumplirse

$$(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) \neq 0$$

veamos

$$(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) = a'ad'd + b'cc'b - a'bd'c - b'dc'a$$

$$= ad(a'd' - b'c') - bc(a'd' - b'c')$$

$$(a'd' - b'c')(ad - bc) \neq 0$$

La transformación de Möbius como composición de transformaciones Tenemos que

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a\left(z+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}\right)+b}{c\left(z+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(z+\frac{d}{c}\right)-\frac{d}{c}+b}{c\left(z+\frac{d}{c}\right)}$$
$$= \frac{a\left(z+\frac{d}{c}\right)}{c\left(z+\frac{d}{c}\right)} + \frac{\frac{-ad}{c}+b}{c\left(z+\frac{d}{c}\right)}$$
$$= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{\left(z+\frac{d}{c}\right)}$$

Esta expresión es la composición de las siguientes transformaciones

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c} \quad \textit{traslación}$$
$$T_2(z) = \frac{1}{z} \quad \textit{Inversión}$$
$$T_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2}\, z \quad \textit{Rotación y homotécia}$$
$$T_4(z) = z + \frac{a}{c} \quad \textit{Traslación}$$

es decir

$$T(z) = (T_1 \circ T_2 \circ T_3 \circ T_4)(z)$$

Inversa Vamos a ver que la transformación inversa de una transformación de Möbius es una transformación de Möbius

Tenemos que una transformación de Möbius es de la forma

$$W = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

donde $ad - bc \neq 0$. Se tiene que al despejar z, se llega a

$$W = \frac{az+b}{cz+d} \;\Rightarrow\; (cz+d)w = az+b$$
$$\Rightarrow\; z = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

con $ad - bc \neq 0$. Esta expresión tiene la forma de una transformación de Möbius, podemos definir entonces $z = S(w)$ y al calcular $T(S(w))$ se obtiene

$$T(S(w)) = \frac{a\left(\frac{-dw+b}{cw-a}\right)+b}{c\left(\frac{-dw+b}{cw-a}\right)+d}$$
$$= \frac{-adw+ab+bcw-ab}{-cdw+bc+dcw-ad}$$
$$= \frac{(bc-ad)w}{bc-ad} = w$$

Análogamente se verifca que $S(T(z)) = z$. Se concluye entonces que S es la función inversa de T y por tanto T es una biyección.

Puntos fijos Un punto fijo dada una transformación cualquiera F, es tal que $F(p) = p$. Con esta definición aplicada a transformaciones de Möbius, se tiene

Proposición 1. *Toda transformación de Möbius diferente de la identidad tiene lo más dos puntos fijos*

Demostración. Sea z un punto fijo, esto implica que

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{az+b}{cz+d} = z$$

$$\Leftrightarrow \; cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

Esto es una cuadrática por lo tanto siempre que $c \neq 0$ tiene a lo sumo dos raíces.
Si $c = 0$ entonces la ecuación se convierte en lineal $(d-a)z - b = 0$ la cual tiene solución única si $d - a \neq 0$ □