Introducción al geometría hiperbólica

Ejercicio Hallar una transformación de Möbius $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que mande a los puntos z_1, z_2, z_3 en los puntos w_1, w_2, w_3 respectivamente

Solución Necesitamos una transformación de Möbius

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad con \;\; ad - bc \neq 0$$

que satisfaga

$$w_1 = \frac{az_1+b}{cz_1+d}, \quad w_2 = \frac{az_2+b}{cz_2+d}, \quad w_3 = \frac{az_3+b}{cz_3+d}$$

hacemos las diferencias

$$w - w_1 = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{(cz_1+d)(az+b)-(az_1+b)(cz+d)}{(cz+d)(cz_1+d)} = \frac{(ad-bc)(z-z_1)}{(cz+d)(cz_1+d)}$$

$$w - w_3 = \frac{az_3+b}{cz_3+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d} = \frac{(cz_3+d)(az+b)-(az_3+b)(cz+d)}{(cz+d)(cz_3+d)} = \frac{(ad-bc)(z-z_3)}{(cz+d)(cz_3+d)}$$

$$w_2 - w_1 = \frac{(ad-bc)(z_2-z_1)}{(cz_2+d)(cz_1+d)}$$

$$w_2 - w_3 = \frac{(ad-bc)(z_2-z_3)}{(cz_2+d)(cz_3+d)}$$

Tenemos entonces

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

y se va despejando w en términos de z.
Podemos definir entonces

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \begin{cases} \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} & si \quad z_1, z_2, z_1 \in \mathbb{C} \\ \frac{z_2-z_3}{z-z_3} & si \quad z_1 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z-z_3} & si \quad z_2 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z_2-z_1} & si \quad z_3 = \infty \end{cases}$$

Ejercicio Hallar una transformación de Möbius $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que mande a los puntos $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$ en los puntos $w_1 = -1, w_2 = -i, w_3 = 1$ respectivamente

Solución Usando lo anterior

$$\frac{(w+1)(-i-1)}{(w-1)(-i+1)} = \frac{z-0}{1-0}$$

$$\Rightarrow \frac{w+1}{w-1}(-i) = z$$

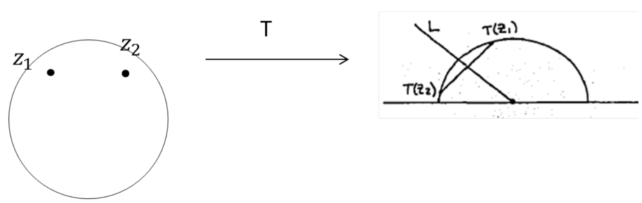
$$\Rightarrow \frac{w+1}{w-1} = zi$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\ w+1 = zi(w-1)\\
&\Rightarrow\ w+1 = wzi - zi\\
&\Rightarrow\ w - wiz = -1 - zi\\
&\Rightarrow\ w(1-iz) = -1 - iz\\
&\Rightarrow\ w = \frac{-1-iz}{1-iz} = \frac{-1-iz}{1-iz}\left(\frac{i}{i}\right) = \frac{z-i}{z+i}
\end{aligned}
$$

Esta transformación de hecho manda la recta real en el circulo unitario y el interior del circulo unitario en el semiplano.

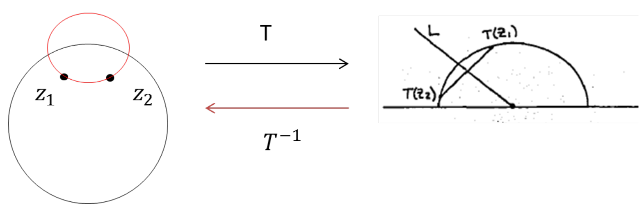
Teorema 1. *Si z_1, z_2 estan en el disco unitario. Entonces existe un único circulo ortogonal al circulo unitario que pasa por z_1, z_2*

Demostración. Sabemos que existe una transformación T de Möbius que manda el disco unitario en el semiplano superior, si z_1, z_2 estan en el circulo unitario entonces sus imagenes $T(z_1)$, $T(z_2)$ estan en el semiplano superior o inferior,



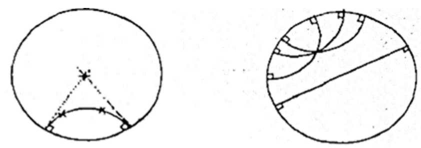
ahi construimos el circulo cuyo centro es el punto de intersección de la recta L y el eje X, donde la recta L es la bisectriz del segmento formado por los puntos $T(z_1), T(z_2)$ y por lo tanto el radio es la distancia del centro a $T(z_1)$ ó $T(z_2)$.

Tenemos que por construcción es el único circulo ortogonal al eje X. Con la transformación inversa tenemos el circulo ortogonal buscado.



$\square$

Tenemos transformaciones de Möbius del disco unitario que mandan circulos ortogonales en círculos ortogonales.
Si llamamos recta al circulo ortogonal que pasa por z_1, z_2.
Y llamamos puntos a los puntos del disco, se tiene
(a) Dados dos puntos existe una recta que pasa por ellos
(b) Dado un punto p exterior a la recta l existen muchas rectas que pasan por p y no tocan a l.



Como vemos en el inciso (b) se tiene la negación al quinto postulado de la geometría euclidiana.
Con estas denominaciones se puede hacer una geometría no euclidiana, una de ellas es la ***Geometría Hiperbólica***.