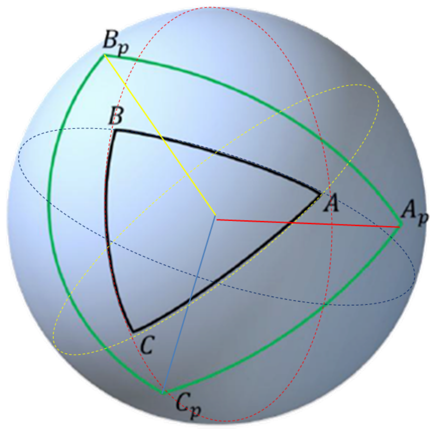
Triángulo Polar

Definición 1. *Dado un triángulo esférico ABC, se define su triángulo polar y se denota por $A_pB_pC_p$, al que se obtiene uniendo por arcos de circunferencia máxima los polos correspondientes a cada uno de los lados, escogiendo en cada caso aquel que se encuentre en el mismo hemisferio que el triángulo esférico.*

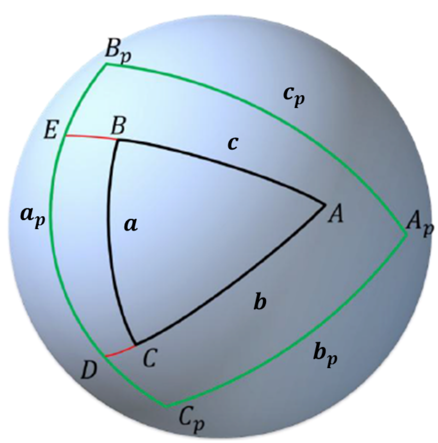


El vértice A_p es el polo, de la circunferencia que contiene al lado a, más cercano al vértice A. El vértice B_p es el polo, de la circunferencia que contiene al lado b, más cercano al vértice B. Finalmente vértice C_p es el polo, de la circunferencia que contiene al lado c, más cercano al vértice C.

Ejercicio Dados dos triángulos polares, cada ángulo de uno de los triángulos es igual al suplemento de los correspondientes lados opuestos del otro triángulo

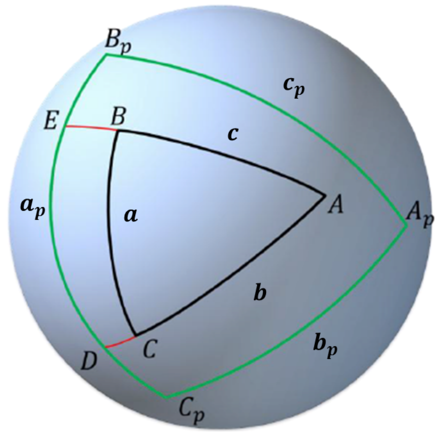
$$A = 180° - a_p$$
$$B = 180° - b_p$$
$$C = 180° - c_p$$

Demostración. En el triángulo ABC prolonguemos los lados c y b hasta que corten al lado a_p en los puntos E, D.



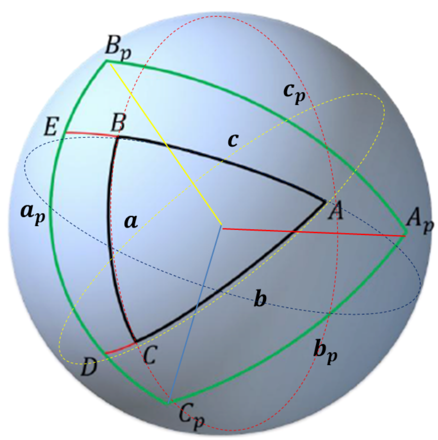
El arco ED tiene la misma medida que el ángulo A. Considerando esto se tenemos

$$arco\ B_pD + \ arco\ C_pE = a_p + A$$



como B_p es el polo de la circunferencia máxima que contiene al lado b y C_p cumple la misma relación respecto al lado c, tenemos entonces

$$arco\ B_pD = \ arco\ C_pE = 90°$$



con lo cual la igualdad

$$arco\ B_pD + \ arco\ C_p = a_p + A$$

se expresa

$$180° = a_p + A$$

de donde

$$A = 180° - a_p$$

para los otros ángulos se procede análogo $\square$

Ejercicio Demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo esférico es menor que 540

Demostración. Sea ABC el triángulo esférico y sea $A_pB_pC_p$ su triángulo polar, según lo anterior

$$A + B + C = 180^\circ - a_p + 180^\circ{}_p - b_p + 180^\circ - c_p = 540^\circ - (a_p + b_p + c_p)$$

$$\Rightarrow \; A + B + C < 540^\circ$$

al ser $a_p + b_p + c_p > 0$ $\square$