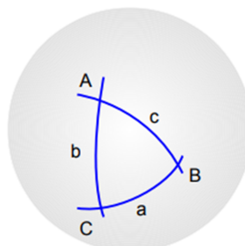
Un poco de trigonometría esférica

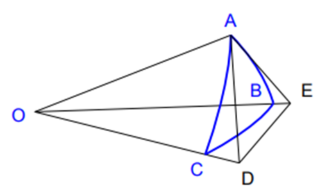
Las leyes de los cosenos y de los senos para triángulos en el plano no son válidas para triángulo esféricos, sin embargo se tienen una ley de esférica de senos y una ley esférica de cosenos, que permiten calcular los ángulos de un triángulo en términos de los lados y también permiten calcular los lados en términos de los ángulos.

Lema 1. *Ley esférica de los cosenos*

$$\cos\ a = \cos\ c\ \cos\ b\ +\ \text{sen}\ c\ \text{sen}\ b\ \cos\ A$$



Demostración. Sea O el centro de la esfera. En el plano que pasa por O, B y C, y en el plano tangente a la esfera por el punto A, considerar los triángulos ODE y ADE.



Por la ley de los cosenos

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE \cdot AD\ \cos A \qquad (1)$$
$$DE^2 = OE^2 + OD^2 - 2OE \cdot OD\ \cos a \qquad (2)$$

Como los triángulos OAE y OAD son rectángulos

$$OE^2 = AE^2 + OA^2 \quad y \quad OD^2 = AD^2 + OA^2$$

sustituimos en la ecuación (2) y nos queda

$$DE^2 = 2OA^2 + AE^2 + AD^2 - 2OE \cdot OD\ \cos a \qquad (3)$$

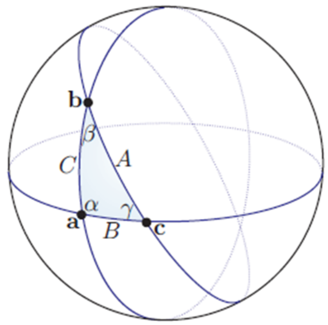
Igualando las ecuaciones (1) y (3) obtenemos

$$2OA^2 - 2OE \cdot OD\ \cos\ a = -2AE \cdot AD\ \cos A$$
$$\Rightarrow\ OE \cdot OD\ \cos\ a = OA^2 + AE \cdot AD \cos\ A$$
$$\Rightarrow\ \cos\ a = \frac{OA}{OE} \cdot \frac{OA}{OD} + \frac{AE}{OE} \cdot \frac{AD}{OD}\ \cos\ A$$
$$\Rightarrow\ \cos\ a = \cos\ c\ \cos\ b + \text{sen}\ c\,\text{sen}\ b \cos\ A$$

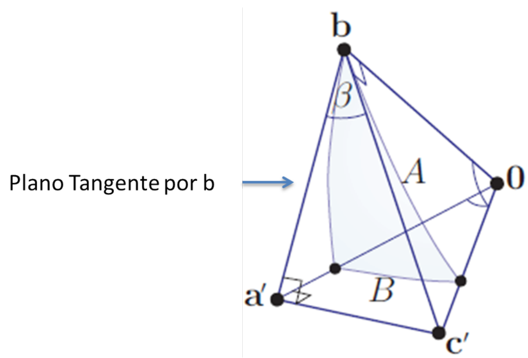
□

Lema 2. *Ley esférica de los senos*

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} \gamma}$$



Demostración. Primero hay que ver el caso en que el triángulo es rectángulo; digamos que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tenemos que

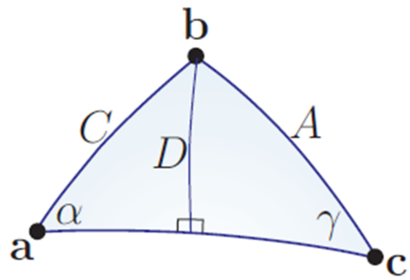


$$\operatorname{sen}\ \beta = \frac{d(a', c')}{d(b, c')}, \qquad \operatorname{sen}\ B = \frac{d(a', c')}{d(0, c')}, \qquad \operatorname{sen}\ A = \frac{d(b, c')}{d(0, c')}$$

se tiene que

$$\operatorname{sen}\ \beta = \frac{d(a', c')}{d(b, c')} = \frac{\frac{d(a', c')}{d(0, c')}}{\frac{d(b, c')}{d(0, c')}} = \frac{\operatorname{sen}\ B}{\operatorname{sen}\ A}$$

Para el caso general, se traza la perpendicular de un vértice b digamos, al lado opuesto; y si D es la altura entonces se obtiene, en los dos triángulos rectángulos que se forman



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{sen } D}{\text{sen } C} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha \;\text{ sen } C = \text{sen } D, \qquad sen\ \alpha = \frac{\text{sen } D}{\text{sen } A} \Rightarrow \text{sen}\,\gamma \;\text{ sen } A = \text{sen } D$$

□

de donde

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } \alpha} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } \gamma}$$