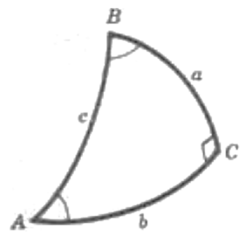
## Triángulo Rectángulos Esféricos

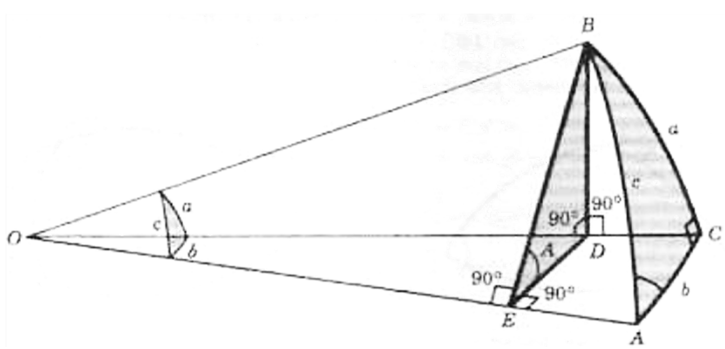
Se llama triángulo esférico rectángulo a un triángulo esférico tal que uno de sus ángulo sea recto.




**Proposición 1.** *En cualquier triángulo esférico rectángulo $ABC$ cse cumple*

1. $\text{sen } a = \text{sen } A \text{ sen } c$
2. $\tan a = \tan A \text{ sen } b$
3. $\tan a = \cos B \tan c$
4. $\cos c = \cos b \cos a$
5. $\cos A = \text{sen } B \cos a$
6. $\text{sen } b = \text{sen } B \text{ sen } c$
7. $\tan b = \tan B \text{ sen } a$
8. $\tan b = \cos A \tan c$
9. $\cos c = \cot A \cot B$
10. $\cos B = \text{sen } A \cos b$

*Demostración.* Sobre una esfera de centro 0, determínese un triángulo esférico rectángulo cuyos lados a y b sean menores a 90°. Unase 0 con los vértices del triángulo para formar el ángulo triedro $0 - ABC$. Considérese el plano perpendicular a OA que pasa por B. Este plano corta a 0C en D y a 0A en E.



Puesto que 0E es perpendicular al plano BDE, es perpendicular a las rectas EB y ED. Entonces, los triángulo BEO y DEO son rectángulos, y su ángulo recto se encuentra en E. Además, $\angle\, BED$ es un ángulo plano del ángulo diedro B-OA-C y, por tanto, sirve de medida al ángulo A del triángulo esférico. Como el plano BDE es perpendicular a OE, es perpendicular al plano OAC que pasa por OE. Por otra parte, BD, intersección de los planos OBC y BDE perpendiculares al plano OAC, es, a su vez, perpendicular a OAC. Por tanto, los triángulo BDO y BDE son rectángulos, y su ángulo recto se encuentra en D.
En los triángulos rectángulos BDO, BDE y BEO

$$\text{sen }\ a = \frac{DB}{OB} = \frac{DB}{EB} \cdot \frac{EB}{OB} = \text{sen }\ A\ \text{ sen }\ c \qquad (1)$$

En los triángulos rectángulos BDO, BDE y DEO

$$\tan\ a = \frac{DB}{OD} = \frac{DB}{ED} \cdot \frac{ED}{OD} = \tan\ A\ \text{ sen }\ b \qquad (2)$$

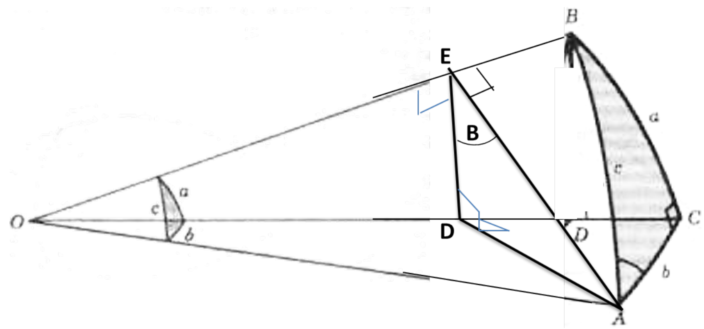
En los triángulos rectángulos BEO, DEO y BDO

$$\cos\ c = \frac{OE}{OB} = \frac{OE}{OD} \cdot \frac{OD}{OB} = \cos\ b\ \cos\ a \qquad (8)$$

En los triángulos rectángulos DEO, BDE y BEO

$$\tan\ b = \frac{ED}{OE} = \frac{ED}{EB} \cdot \frac{EB}{OE} = \cos\ A\ \tan\ b \qquad (4)$$

Si ahora se considera el plano que pasa por A y que es perpendicular a OB




Se tiene los triángulos rectángulos ADO, ADE y AEO

$$\text{sen}\ b = \frac{DA}{OA} = \frac{DA}{EA}\cdot\frac{EA}{OA} = \text{sen}\ B\ \text{sen}\ c \qquad (6)$$

$$\tan\ b = \frac{DA}{OD} = \frac{DA}{ED}\cdot\frac{ED}{OD} = \tan\ B\ \text{sen}\ a \qquad (7)$$

$$\tan\ a = \frac{ED}{OE} = \frac{ED}{EA}\cdot\frac{EA}{OE} = \cos\ B\ \cos\ c \qquad (3)$$

Las identidades restantes las obtenemos algebraicamente.
Si multiplicamos (2) y (7) se obtiene

$$\tan\ a\cdot\tan\ b = \tan\ A\cdot\text{sen}\ b\cdot\tan\ B\cdot\text{sen}\ a$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}\ a}{\cos\ a}\cdot\frac{\text{sen}\ b}{\cos\ b} = \tan\ A\cdot\text{sen}\ b\cdot\tan\ B\cdot\text{sen}\ a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos\ a}\cdot\frac{1}{\cos\ b} = \tan\ A\tan\ B$$

de la identidad (4) se tiene

$$\frac{1}{\cos\ c} = \tan\ A\tan\ B$$

$$\Rightarrow \cos\ c = \cot\ A\cot\ B \qquad (9)$$

Si multiplicamos (6) y (8) se obtiene

$$\text{sen}\ b\cdot\cos\ A\cdot\tan\ c = \tan\ b\cdot\text{sen}\ B\cdot\text{sen}\ c$$

$$\Rightarrow \cos\ A = \frac{\text{sen}\ B\cdot\tan\ b\cdot\text{sen}\ c}{\text{sen}\ b\tan\ c}$$

$$\Rightarrow \cos\ A = \frac{\text{sen}\ B\cos\ c}{\cos\ b}$$

$$\Rightarrow \cos\ A \underbrace{=}_{(4)} \frac{\text{sen}\ B\cos\ a\cos\ b}{\cos\ b}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\ A = \text{sen}\ B \cos\ a \qquad (5)$$

Si multiplicamos (1) y (3) se obtiene

$$\text{sen}\ a \cdot \cos\ B \cdot \tan\ c = \tan\ a \cdot \text{sen}\ A \cdot \text{sen}\ c$$

$$\Rightarrow \quad \cos\ B = \frac{\text{sen}\ A \cdot \tan\ a \cdot \text{sen}\ c}{\text{sen}\ a \tan\ c}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\ B = \frac{\text{sen}\ A \cos\ c}{\cos\ a}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\ B \underbrace{=}_{(4)} \text{sen}\ A \cos\ b \qquad (10)$$

$\square$