Facultad de Ciencias
UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 4

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

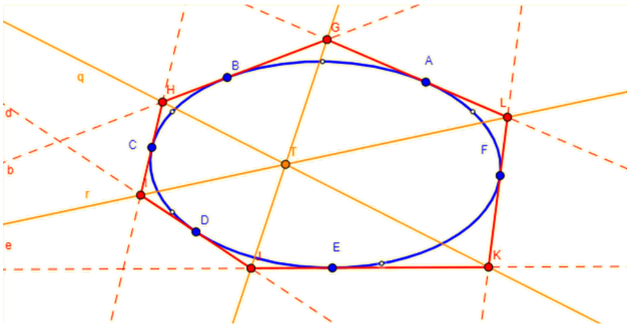
Índice general

Capítulo 1 Unidad 4. Principales Teoremas

1.1 Teorema de Briachon

En 1806, a la edad de veintiún años, un estudiante de la École Polytechnique, Charles Julien Brianchon (1785-1864), publicó un artículo en el Journal de Vècole Polytechnique que se convertiría en una de las contribuciones fundamentales al estudio de la cónica. Secciones en geometría proyectiva. Su desarrollo llevó a una reafirmación del teorema algo olvidado de Pascal y su extensión, después de lo cual Brianchon expuso un nuevo teorema que ahora lleva su nombre. El teorema de Brianchon, que dice en cualquier hexágono circunscrito a una sección cónica, las tres diagonales se cruzan entre sí en el mismo punto.

El punto de intersección de las diagonales p, q y r es el punto de Brianchon T de la configuración. Notése que no solo depende de los vértices, sino del orden que tienen en el hexágono.



Este resultado tiene una curiosa semejanza con el teorema de pascal. son, de hecho, duales el uno del otro. Esto se puede ver fácilmente comparando las siguientes versiones de cada teorema:

Teorema de Pascal Los puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono inscrito en una sección cónica son colineales.

Teorema de Brianchon Las líneas que unen los vértices opuestos de un hexágono circunscrito a una sección cónica son concurrentes.

Observe que las dos afirmaciones anteriores son iguales, excepto las palabras subrayadas, que son duales entre sí. Al igual que con el teorema de Pascal, consideraremos solo la sección cónica que es un círculo.

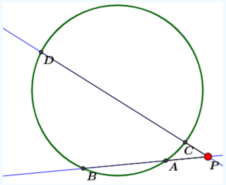
Teorema 1.1 (Teorema de Brianchon)

Si un hexágono está circunscrito a un círculo, las líneas que contienen vértices opuestos son concurrentes. ♡

Las pruebas más simples de este teorema requieren el conocimiento de conceptos de la geometría proyectiva. Aunque en este punto estamos preparados para probar este teorema con métodos euclidianos.

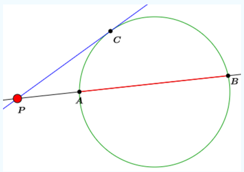
Proposición 1.1

Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA{\cdot}PB = PC{\cdot}PD$.



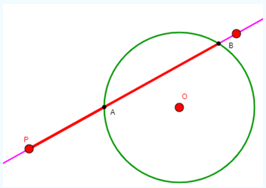
Proposición 1.2

Si A, B y C son puntos sobre una circunferencia y si la tangente en C, intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PC^2 = PA \cdot PB$.



Proposición 1.3

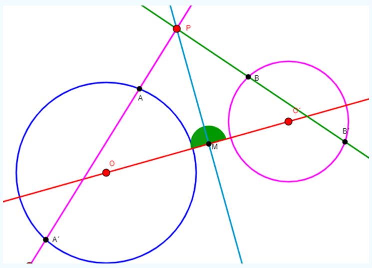
La potencia de un punto P con respecto a una circunferencia de radio R es $d^2 - R^2$*, donde d es la distacia de P al centro O. La potencia será positiva, cero o negativa dependiendo si P se encuentra fuera, sobre o dentro de la circunferencia.*



Se cumple entonces que $PA \cdot PB = d^2 - R^2$

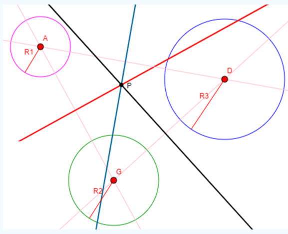
Proposición 1.4

(Eje radical). El lugar geométrico de los puntos P que tienen la misma potencia con respecto a dos circunferencias es una perpendicular a la línea de los centros.



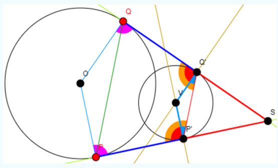
Proposición 1.5

Los ejes radicales de tres circunferencias, tomadas por pares, son concurrentes.

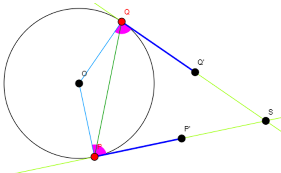


Proposición 1.6

Si P' y Q' son dos puntos sobre las tangentes en P y Q de una circunferencia (ambos del mismo lado de la línea PQ) tales que PP' =QQ', entonces existe una circunferencia tangente a las rectas PP' y QQ' en P' y Q', respectivamente.



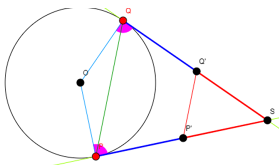
Demostración Prolongamos las rectas tangentes PP' y QQ'. Sea S su punto de intersección.



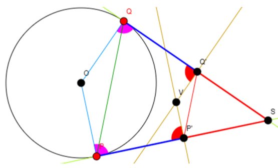
La potencia de S con respecto a la circunferencia es .

$$SQ^2 = SO^2 - R^2 = SP^2$$

En consecuencia, $SP = SQ$. Por lo tanto, el triángulo PSQ es un triángulo isósceles.
Como $SP = SQ$ y $PP' = QQ'$, entonces $Q'S = P'S$.



Por lo tanto, el triángulo $Q'SP'$ también es isósceles.
Por P' y Q', construimos perpendiculares a PP' y QQ'. Sea V su punto de intersección.

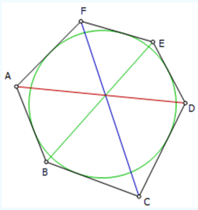


El triángulo Q'SP' es isósceles, entonces los ángulos debajo de la base son iguales entre sí, por lo tanto, $\angle Q'P'P = \angle P'Q'Q$.
Y como los ángulos $\angle VQ'Q$ y $\angle \ VP'P$ son ángulos rectos, entonces en el triángulo $\triangle \ P'VQ'$ sus ángulos

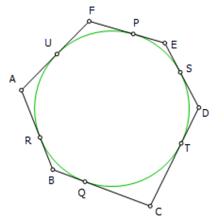
en la base $\angle VP'Q'$ y $\angle VQ'P'$ son iguales. Por lo tanto, en el triángulo $\triangle P'VQ'$,los lados VP’ y VQ’ son iguales.
Los lados VP’ y VQ’ son perpendiculares a las rectas PP’ y QQ’ en P’ y Q’, respectivamente. Por lo tanto, podemos construir la circunferencia con centro en V y radio VQ’, que es tangente a las rectas PP’ y QQ’ en P’ y Q’. Por lo tanto, existe una circunferencia tangente a PP’ y QQ’ en P’ y Q’.■

Proposición 1.7

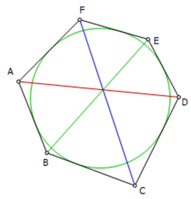
Si los seis lados de un hexágono son tangentes a una circunferencia, entonces sus tres diagonales son concurrentes (o posiblemente paralelas).



Demostración Sean R, Q , T, S, P, U los puntos de contacto de las seis tangentes AB, BC, CD, DE, EF, FA como se muestra en la construcción.

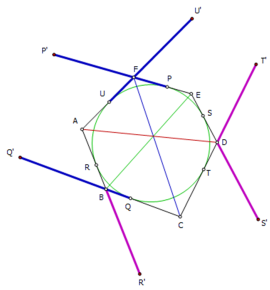


Supongamos por simplicidad que el hexágono es convexo, así que las tres diagonales AD, BE, CF son secantes de la circunferencia inscrita (y que la posibilidad de paralelismo no existe).

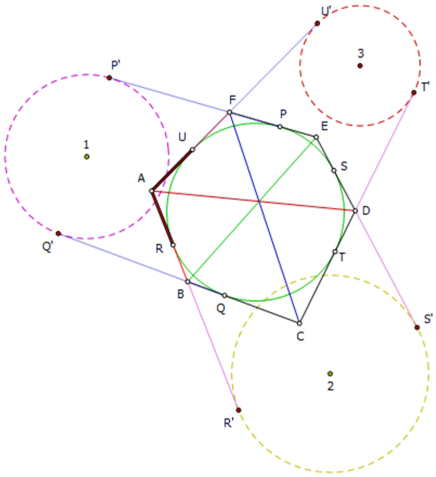


Sobre las líneas EF, CB, AB, ED, CD, AF (prolongadas) tomemos los puntos P’, Q’, R’, S’, T’, U’ tales que

$$PP' = QQ' = SS' = TT' = UU'$$



Por la proposición 6 podemos construir las circunferencias 1 (tangente a PP’ y QQ’ en P’, Q’), 2 (tangente a RR’ y SS’ en R’ y S’), 3 (tangente a TT’ y UU’ en T’ y U’).



Por la proposción 2 y la proposición 3, sabemos que dos tangentes a una circunferencia desde el mismo punto tienen longitudes iguales. Por lo tanto,

$$AR = AU$$

. También, $RR' = UU'$. Tenemos por adición $AR' = AU'$. Como $DS = DT$ y $SS' = TT'$. Tenemos por substracción $DS' = DT'$. Por lo tanto, tanto A como D son puntos de igual potencia con respecto de las circunferencias 2 y 3; y su unión AD coincide con el eje radical de estas dos circunferencias.
Similarmente, BE está sobre el eje radical de las circunferencias 1 y 2. Y CF está sobre está sobre el eje radical de las circunferencias 2 y 3.
Por la proposición 5, los ejes radicales de tres circunferencias no coaxiales, tomadas por pares, son concurrentes. Por lo tanto, hemos exhibido las diagonales de nuestro hexágono, como los ejes radicales de tres circunferencias. Por lo tanto, AD, BE y CF son concurrentes. Sea W el punto de concurrencia.

El punto de concurrencia de estas líneas es llamado el punto de Brianchon del hexágono. ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. El pentágono ABCDE está circunscrito a un círculo, con puntos de tangencia en F, M, N, R y S. Si las diagonales AD y BE se intersecan en el punto P, demuestre que los puntos C, P y F son colineales.