Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 4

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 4. Principales Teoremas

1.1 Teorema de Ceva

Los dos teoremas se consideran compañeros entre sí, aunque sus descubrimientos estuvieron separados por muchos siglos. Menelao demostró su teorema alrededor del año 100 d.C. Languideció en la oscuridad hasta 1678, cuando fue descubierto por Giovanni Ceva, quien lo publicó junto con el teorema que lleva su nombre. Los dos teoremas son sorprendentemente similares, y es sorprendente que haya tal lapso de tiempo entre los dos descubrimientos.
Los teoremas de Ceva y Menelao son herramientas que permiten trabajar muchos problemas en los que intervienen la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas. Ambos están estrechamente relacionados, aun cuando el de Menelao es del siglo primero y el de Ceva del siglo XVII.

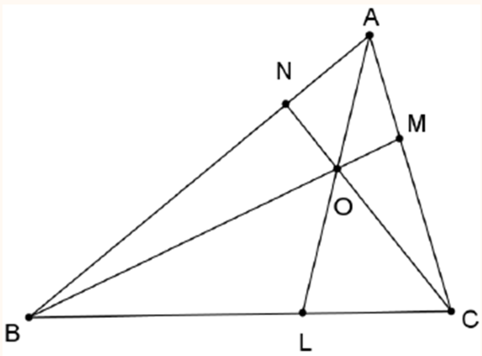
Definición 1.1 (Cevianas)

Una recta que pasa por un vértice de un triángulo $\triangle ABC$ pero que no coincide con ningún lado, se llama usualmente ***recta ceviana*** *del triángulo.* ♣

Teorema 1.1 (Teorema de Ceva)

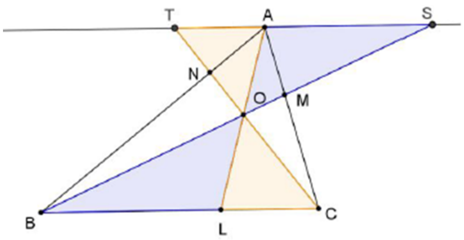
Tres cevianas AL, BM y CN de un triángulo ABC son concurrentes en el punto O si y sólo si:

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$$



♡

Demostración Se traza por A una paralela a BC. Sean S y T las intersecciones de BM y CN con esta paralela, respectivamente.



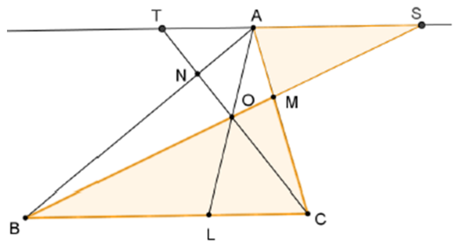
Se tiene que $\triangle\ BLO \sim \triangle\ SAO$, por lo que

$$\frac{BL}{LO}=\frac{SA}{AO} \tag{1.1}$$

También se tiene $\triangle\ OLC \sim \triangle\ OAT$, por lo que

$$\frac{OL}{LC}=\frac{OA}{AT} \tag{1.2}$$

Por otro lado



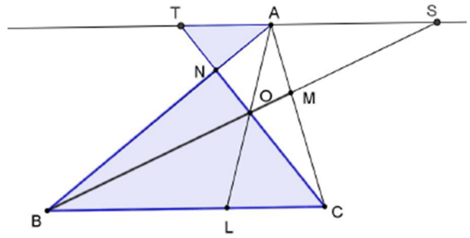
Se tiene que

$$\triangle CMB \sim \triangle AMS$$

, por lo que

$$\frac{CM}{MA} = \frac{BC}{SA} \tag{1.3}$$

finalmente



Se tiene que

$$\triangle ANT \sim \triangle BNC$$

, por lo que

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AT}{BC} \tag{1.4}$$

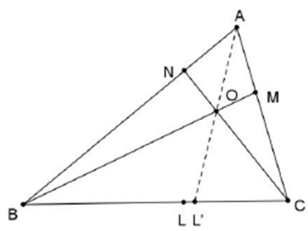
Multiplicando (1,1), (1,2), (1,3) y (1,4), se obtiene:

$$\frac{BL}{LO} \cdot \frac{OL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = \frac{SA}{AO} \cdot \frac{AO}{AT} \cdot \frac{BC}{SA} \cdot \frac{AT}{BC}$$

por lo tanto

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

Inversamente, supóngase que L, M y N son tres puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC y que la relación anterior se satisface. Sea O el punto de intersección de BM y CN. Se traza la recta AO. Sea L' el punto de intersección de AO con BC. Por el teorema de Ceva:



$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

por tanto

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 = \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA}$$

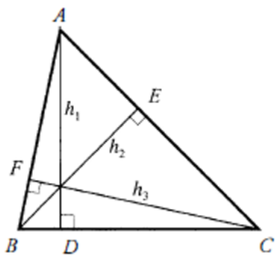
de donde

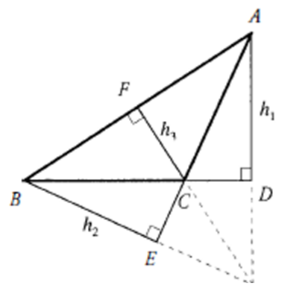
$$\frac{BL'}{L'C} = \frac{BL}{LC}$$

y por tanto $L = L'$. ■

Ejemplo 1.1 Las alturas de un triángulo $\triangle ABC$ son concurrentes.

Solución





Por lo tanto, para un triángulo $\triangle ABC$ con alturas AD, BE y CF. Usando triángulos semejantes para relacionar las razones con la longitud de las alturas,

$$\triangle BEC \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{CE}{DC} = \frac{h_2}{h_1}$$
$$\triangle ABE \sim \triangle ACF \Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{h_3}{h_2}$$
$$\triangle ABD \sim \triangle CBF \Rightarrow \frac{BD}{BF} = \frac{h_1}{h_3}$$

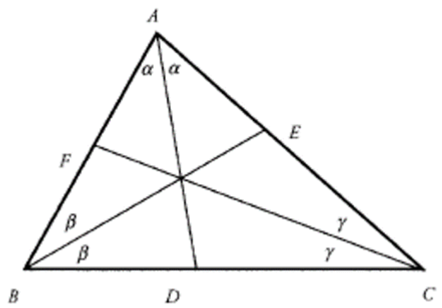
Por eso,

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{h_3}{h_2} \cdot \frac{h_1}{h_3} = 1$$

y el teorema de Ceva muestra que las alturas son concurrentes. ■

Ejemplo 1.2 Las bisectrices internas de los ángulos de un triángulo son concurrentes.

Solución



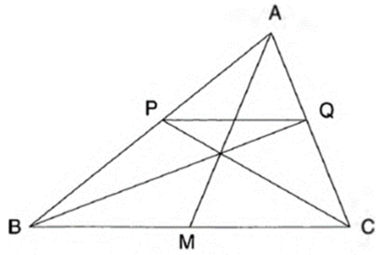
Recuerde del teorema de la bisectriz del ángulo que si la bisectriz del ángulo interior de $\angle A$ se encuentra con el lado BC en D, entonces $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Por lo tanto,

$$\frac{CA}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} = 1$$

Según el teorema de Ceva, son concurrentes. ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Pruebe que las medianas de un triángulo son concurrentes.
2. Demuestre que la bisectriz de cualquier ángulo interior de un triángulo no isósceles y las bisectrices de los dos ángulos exteriores en los otros vértices son concurrentes.
3. En un triángulo $\triangle ABC$, $PQ \parallel BC$ e interseca AB y AC en los puntos P y Q, respectivamente. Demuestre que PC y QB se cruzan en un punto de la mediana AM.


A
P
Q
B
M
C