Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 1

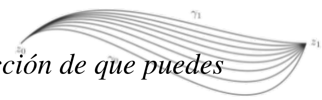
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



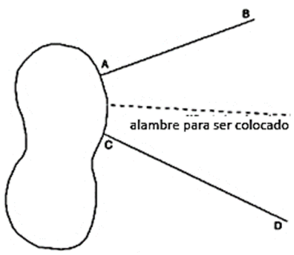
La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

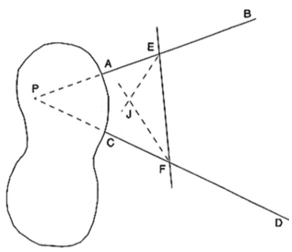
Capítulo 1 Unidad 1. Geometría del triángulo

1.1 Circuncentro, Incentro, Excentro, Ortocentro, Baricentro

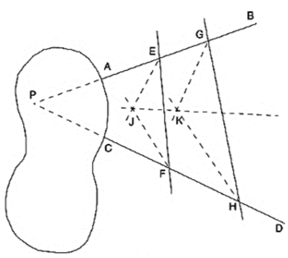
A pesar de su importancia, el concepto de concurrencia de líneas (es decir, tres o más líneas que contienen un punto común) generalmente recibe un tratamiento ligero en un curso de geometría elemental debido a prioridades más altas.
La introducción de algunos teoremas nuevos simplifica bastante el tema de la concurrencia y presenta una nueva perspectiva de la geometría euclidiana.
Como queremos mostrar la importancia de la concurrencia, consideremos el siguiente problema:
Ejemplo 1.1 Se colocan dos alambres en línea recta que se encuentran en una región inaccesible (Figura). ¿Cómo ubicaría la ubicación adecuada para un cable que debe dividir en dos el ángulo formado por los dos cables sin tocar la región inaccesible?



Aunque existen muchos métodos posibles de solución a este problema, elegimos la siguiente solución por una razón que pronto quedará clara.
Dibuje cualquier línea a través de AB y CD, intersecándolos en los puntos E y F, respectivamente.



Construya las bisectrices de $\angle AEF$ y $\angle CFE$, que se encuentran en el punto J. Supongamos que $\triangle PEF$ estuviera completo. La bisectriz de $\angle P$ tendría que contener el punto J porque las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes.
Repita este proceso para cualquier otra línea GH que se encuentre con AB y CD en los puntos G y H, respectivamente (Figura).



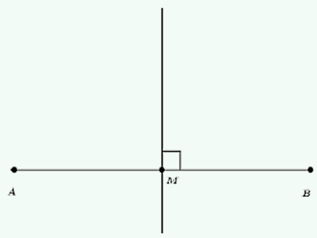
Esta vez, biseca $\angle AGH$ y $\angle CHG$. Estas bisectrices se encuentran en el punto K. Una vez más, notamos que la bisectriz de ángulo requerida (la de $\angle P$) debe contener el punto K. Debido a que esta bisectriz de ángulo requerida debe contener tanto J como K, estos dos puntos determinan nuestra recta deseada, que es la ubicación del cable que se instalará.

Esta solución se basa en gran medida en la noción de que las bisectrices de un triángulo son concurrentes. Como hemos comentado, el tema de la concurrencia en un triángulo merece más atención de la que suele recibir en el curso de geometría elemental. Más adelante, demostraremos que las bisectrices de un triángulo son concurrentes.

1.2 Circuncentro

Definición 1.1 (Mediatriz)

Sean A y B dos puntos en el plano. La ***mediatriz*** *del segmento AB es la línea perpendicular al segmento que pasa por el punto medio M de AB.*

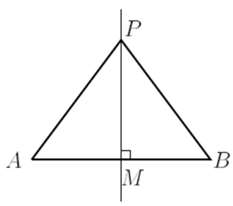


La mediatriz del segmento AB divide al plano en dos regiones, de un lado están los puntos que están más cerca de A, del otro lado están los puntos que están más cerca de B.

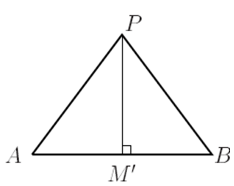
Proposición 1.1 (Caracterización de la mediatriz)

Una manera de caracterizar a la mediatriz es como el conjunto de puntos P que cumplen que la distancia a cada extremo A, B es la misma, esto es, $PA = PB$.

Demostración En efecto, si M es el punto medio de AB y P se encuentra en la mediatriz, entonces podemos formar los dos triángulos rectángulos PAM y PBM.



Por el criterio LAL, estos son congruentes (ya que AM=MB, PM es común y los ángulos entre los lados que se comparan son rectos), por tanto $PA = PB$.
Reciprocamente, si P es un punto que satisface PA=PB entonces P está sobre la mediatriz de AB.
Para ver esto consideramos a M' el pie de la perpendicular de P sobre AB.

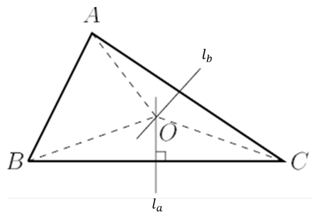


Veamos que M'=M de la siguiente manera: Como los triángulos rectángulos PAM' y PBM' tienen dos pares de lados iguales (PA=PB y PM' es común), el teorema de pitágoras garantiza que los otros catetos son iguales, esto es, AM'=M'B. Por tanto, M' es el punto medio de AB. ■

Teorema 1.1 (Concurrencia de mediatrices)

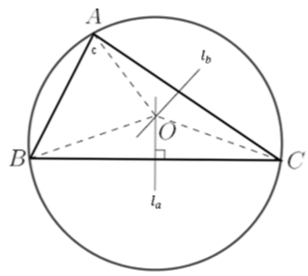
Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes

Demostración Sean ℓ_a y ℓ_b las mediatrices de los lados BC y CA del triángulo ABC. Sea O el punto de intersección de estas mediatrices (hay un punto de intersección, ya que si son paralelas entonces también BC y CA son paralelos, por lo que no se formaría propiamente un triángulo).



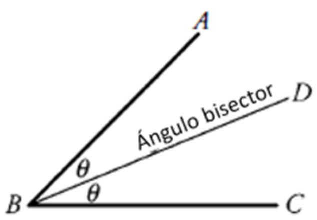
Veamos que O se encuentra también en la mediatriz del segmento AB. Como O esta sobre ℓ_a, $OB = OC$ y como O se encuentra en ℓ_b, OA=OC. Luego, O cumple OA=OB, esto es, O está en la mediatriz de AB. ■

La prueba muestra que el punto **O** es equidistante de los tres vértices, por lo que con el **centro O** podemos circunscribir un círculo alrededor del triángulo. El círculo se llama **circuncírculo** y el punto **O** se llama **circuncentro del triángulo**.

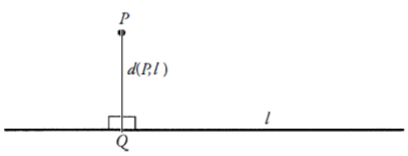


1.3 Incentro

Dado un ángulo no reflejado $\angle ABC$, un rayo BD tal que $\angle ABD = \angle CBD$ se denomina **bisectriz de ángulo** de $\angle ABC$.

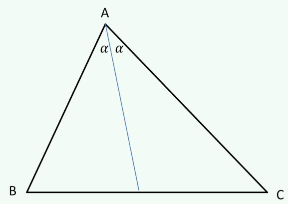


Dada una línea ℓ y en un punto P que no está en ℓ, la distancia de P a ℓ, denotada por $d(P, \ell)$, es la longitud del segmento PQ donde Q es el pie de la perpendicular de P a ℓ.



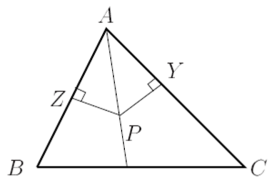
Definición 1.2 (Incentro de un triángulo)

La bisectriz interna del ángulo $\angle CAB$ del triángulo ABC es la recta por A que divide al ángulo en dos ángulos iguales.



♣

Cada punto P de la bisectriz equidista de cada lado del ángulo, esto es, si Z es el pie de la perpendicular de P sobre AB y Y es el pie de la perpendicular de P sobre CA, entonces $PZ = PY$; esto se sigue de que los triángulos rectángulos AZP y AYP son congruentes.



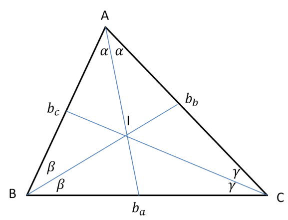
Recíprocamente, un punto P dentro del ángulo $\angle CAB$ de un triángulo ABC, que cumple $PZ = PY$ (donde Y y Z son los pies de las perpendiculares de P sobre CA y AB) es necesariamente un punto de la bisectriz interna: En efecto, los dos triángulos rectángulos APY y APZ son congruentes (ya que tienen dos pares de lados iguales, a saber $PY = PZ$, y AP es común, entonces, por el teorema de Pitágoras, el otro par de catetos son iguales), por tanto $\angle PAZ = \angle PAY$, lo que muestra que P se encuentra sobre la bisectriz.

Teorema 1.2 (Concurrencia de bisectrices)

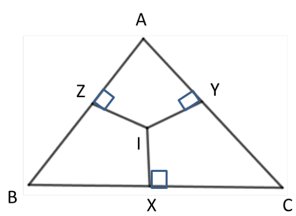
Las bisectrices internas de un triángulo $\triangle ABC$ son concurrentes

♡

Demostración Denotaremos por b_a, b_b, b_c a las bisectrices internas de los ángulos en A,B,C respectivamente

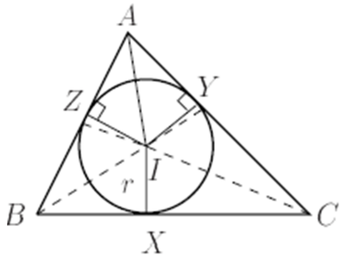


Sea I el punto de intersección de las bisectrices b_b y b_c (hay punto de intersección, pues en caso contrario los ángulos en B y C del triángulo sumarían 180°). Sean X,Y y Z los pies de las perpendiculares de I sobre los lados BC, CA y AB respectivamente.



Por estar I en la bisectriz b_c, tenemos que $IX = IY$ y por estar en la bisectriz b_b, tenemos que $IX = IZ$. Luego, I cumple $IY = IZ$, lo que muestra que I se encuentra en la bisectriz b_a. ■

El punto de concurrencia de las bisectrices se denota I y se conoce por **incentro** del triángulo ABC. La distancia del incentro a cada lado del triángulo es la misma, esta distancia se conoce como **inradio** y se denota con r. La circunferencia de centro I y de radio r, está completamente contenida en el triángulo y es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos X, Y, Z. A esta circunferencia se le llama **incírculo**

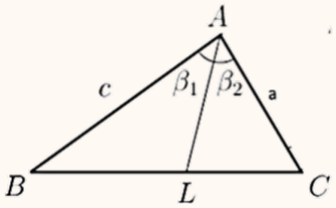


Teorema 1.3 (Teorema de la Bisectriz)

La bisectriz AL del ángulo A de un triángulo ABC divide internamente al lado opuesto BC en razón

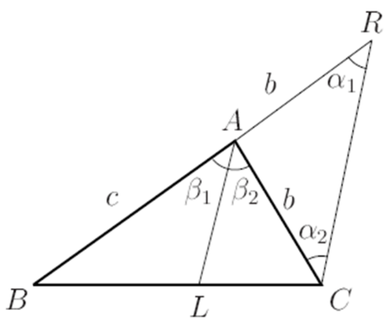
$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA}$$

donde L es el punto de intersección de la bisectriz interna con el lado BC



♡

Demostración Trazamos la paralela a la bisectriz que pasa por el punto C, llamamos R a la intersección de esta recta con la prolongación de AB



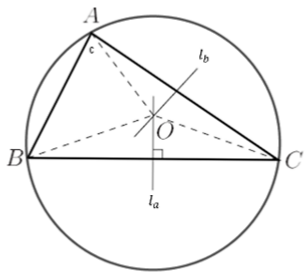
Notemos que $AR = b$. En efecto, tenemos que $\alpha_1 = \beta_1$ por ser rectas paralelas y $\alpha_2 = \beta_2$ ya que son ángulos alternos internos. Como $\beta_1 = \beta_2$ entonces $\alpha_1 = \alpha_2$, luego el triángulo ACR es isósceles y $AR = b$.
Por otro lado los triángulos RBC y ABL son semejantes, por ser de lados paralelos, luego, por el teorem de Thales

$$\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b} = \frac{AB}{CA}$$

■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. En la figura,



el circuncentro es interior al triángulo. ¿En qué tipo de triángulo se encuentra el circuncentro?
   - ¿En uno de los bordes del triángulo?
   - Fuera del triangulo?
2. Dado un $\triangle ABC$ con incentro I, demuestre que

$$\angle BIC = 90 + \frac{1}{2}\angle BAC$$