Facultad de Ciencias
UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 4

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

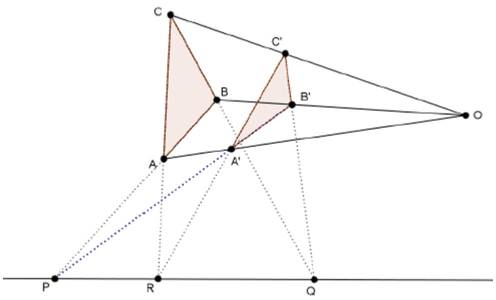
Índice general

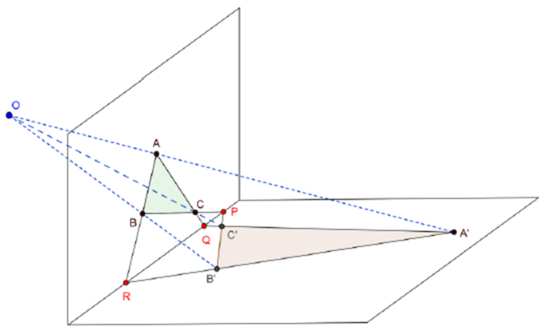
Capítulo 1 Unidad 4. Principales Teoremas

1.1 Teorema de Desargues

Comentario Durante su vida, Gérard Desargues (1591-1661) no disfrutó de la importante estatura como matemático que logró en los años posteriores. Esta falta de popularidad se debió en parte al reciente desarrollo de la geometría analítica por René Descartes (1596-1650) y a la introducción de Desargues de muchos términos nuevos y poco familiares.

En 1648, su alumno Abraham Bosse, un maestro grabador, publicó un libro titulado Manière universelle de M. Desargues, pour pratiquer la perspective, que no fue popularizado hasta unos dos siglos más tarde. Este libro contenía un teorema que en el siglo XIX se convirtió en una de las proposiciones fundamentales de la geometría proyectiva. Este es el teorema que nos interesa aquí. Implica colocar dos triángulos en una posición que permita que las tres líneas que unen los vértices correspondientes sean concurrentes. Cabe destacar que cuando esto se logra, los pares de lados correspondientes se encuentran en tres puntos colineales.

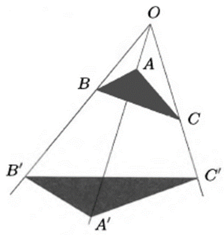




Probaremos el teorema de Desargues utilizando el teorema de Menelao.

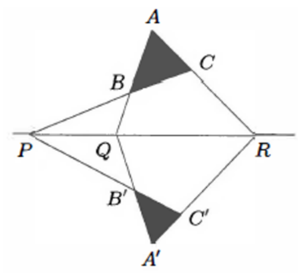
Definición 1.1 (Triángulos copolares)

Se dice que dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son ***copolares*** *desde un punto O si y solo si las uniones de los vértices correspondientes son concurrentes en el punto O; es decir, si y solo si las líneas AA', BB' y CC' son concurrentes en O. El punto O se llama* ***polo****.* ♣

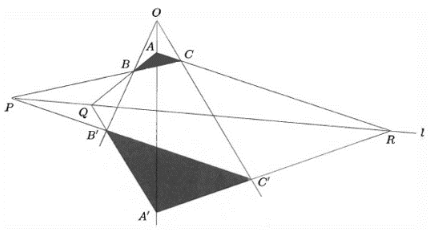


Definición 1.2 (Triángulos coaxiales)

Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son ***coaxiales*** *de una línea l si y solo si los puntos de intersección de los lados correspondientes $P = BC \cap B'C'$, $Q = AB \cap A'B'$ y $P = AC \cap A'C'$ son colineales.* ♣



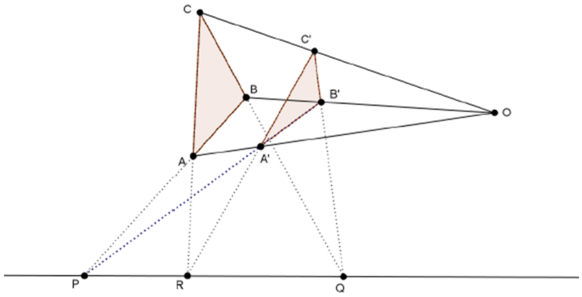
Ahora nuestro objetivo es mostrar que: Dos triángulos en el plano son copolares si y solo si son coaxiales, como en la figura debajo.



La línea ℓ se llama línea de Desargues.

Teorema 1.1 (Teorema de Desargues (Copolar implica Coaxial))

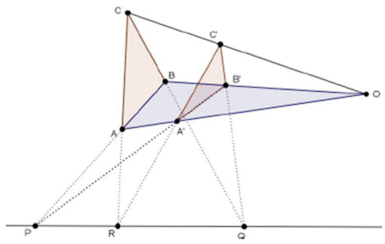
Si en un plano dos triángulos $\triangle\, ABC$ y $\triangle\, A'B'C'$’ son copolares, entonces los triángulos son coaxiales, es decir, los lados correspondientes se cortan en tres puntos colineales P, Q y R. ♡



Demostración

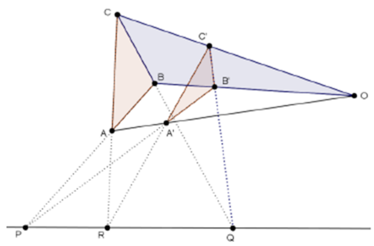
Sean $\triangle\, ABC$ y $\triangle\, A'B'C'$ dos triángulos copolares con O como polo. Sean P la intersección de AB y A’B’, Q la de BC y B’C’ y R la de CA y C’A’. Si se aplica el teorema de Menelao al triángulo $\triangle\, ABO$ con B’A’P como transversal se obtiene

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BB'}{B'O}\cdot\frac{OA'}{A'A}=-1$$



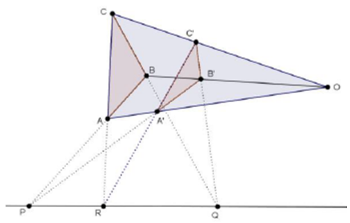
Si se aplica el teorema de Menelao al triángulo $\triangle\, BCO$ con B’C’Q como transversal se obtiene

$$\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CC'}{C'O}\cdot\frac{OB'}{B'B}=-1$$



Si se aplica el teorema de Menelao al triángulo $\triangle\, CAO$ con A’C’R como transversal se obtiene

$$\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AA'}{A'O}\cdot\frac{OC'}{C'C}=-1$$



El producto de estas tres ecuaciones

$$\left(\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BB'}{B'O}\cdot\frac{OA'}{A'A}\right)\left(\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CC'}{C'O}\cdot\frac{OB'}{B'B}\right)\left(\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AA'}{A'O}\cdot\frac{OC'}{C'C}\right)=-1$$

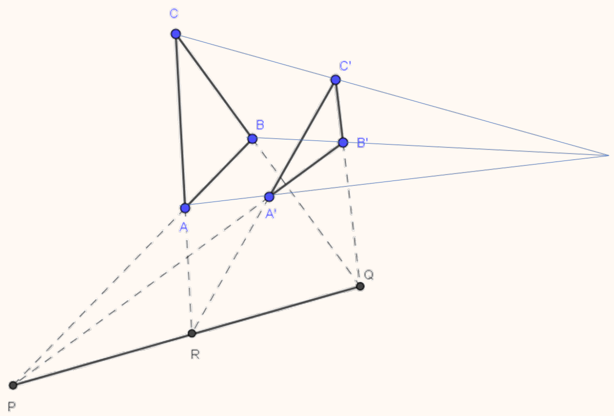
simplificando da como resultado:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=-1\ \ \textit{lo que demuestra que } P,\ Q \textit{ y } R \textit{ son colineales.}$$

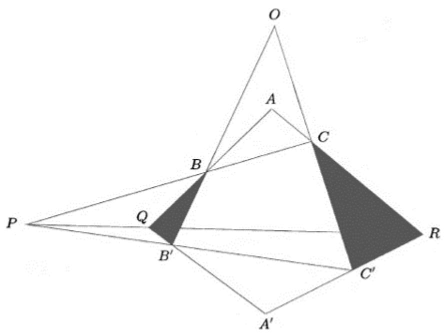
■

Teorema 1.2 (Recíproco del teorema de Desargues (Coaxial implica Copolar))

Sean $\triangle\ ABC$ y $\triangle\ A'B'C'$ dos triángulos coaxiales, es decir, tales que las intersecciones de sus lados correspondientes P, Q y R son colineales, entonces los triángulos son copolares.



Demostración Dado un par de triángulos coaxiales $\triangle\ ABC$ y $\triangle\ A'B'C'$, como en la figura siguiente,



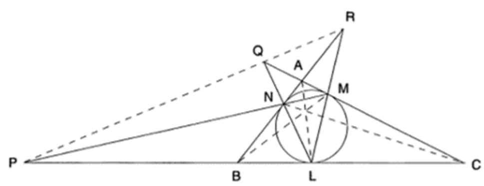
queremos mostrar que son copolares; es decir, queremos mostrar que AA', BB' y CC' son concurrentes.
Sea O la intersección de BB'y CC'. Entonces tenemos que demostrar que AA' también pasa por O.
Observe que $\triangle\ QBB'$ y $\triangle\ RCC'$ son copolares de P. De la primera mitad de la prueba, sabemos que $\triangle\ QBB'$ y $\triangle\ RCC'$ también son coaxiales, de modo que

$$QB \cap RC = A, \quad QB' \cap RC' = A' \quad y \quad BB' \cap CC' = O$$

son colineales, por lo que AA' pasa a través de O. Por lo tanto, $\triangle\ ABC$ y $\triangle\ A'B'C'$ son copolares de O. ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Un círculo inscrito en $\triangle\ ABC$ es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos L, M y N, respectivamente. MN se cruza con BC en el punto P, NL se cruza con AC en el punto Q, y ML interseca a AB en el punto P. Demuestre que los puntos P, Q y R son colineales.



2. En $\triangle\ ABC$, los puntos F, E y D son los pies de las alturas dibujadas desde los vértices A, B y C, respectivamente. Los lados del triángulo del pedal $\triangle\ FED$, EF, DF y DE intersecan los lados de

$\triangle\ ABC$, AB, AC y BC, en los puntos M, N y L, respectivamente. Demuestre que los puntos M, N y L son colineales.