Facultad de Ciencias UNAM

GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 1

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

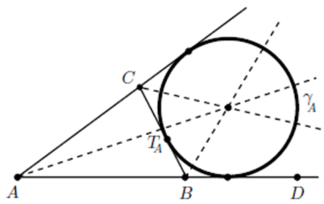
Capítulo 1 Unidad 1. Geometría del triángulo

1.1 Excentros

El incírculo no es el único círculo que es tangente a las tres líneas laterales del triángulo. Un círculo que es tangente a las tres líneas laterales de un triángulo se llama equicírculo (o círculo triangente) para el triángulo.

Definición 1.1

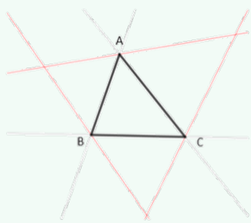
Un círculo que está fuera del triángulo y es tangente a las tres líneas laterales del triángulo se llama círculo escrito o excirculo. ♣



1.2 Excentro

Definición 1.2 (Bisectriz Exterior)

Se llaman ***bisectrices exteriores*** *de un triángulo $\triangle ABC$ a las rectas que dividen en dos partes iguales a los ángulos exteriores del triángulo*



♣

Proposición 1.1

Cada par de bisectrices de ángulos externos de un triángulo se intersectan. ♠

Demostración

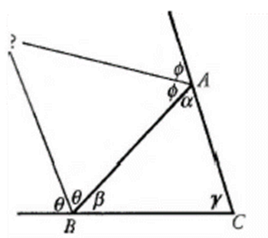
Refiriéndose al diagrama,

$$2\theta = \alpha + \gamma$$
$$2\phi = \beta + \gamma$$

sumando ambas expresiones

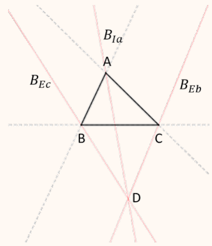
$$2(\theta + \phi) = 180 + \gamma$$

Dado que $\gamma < 180$, se deduce que $\theta + \phi < 180$, por lo que las bisectrices externas de los ángulos no pueden ser paralelas.



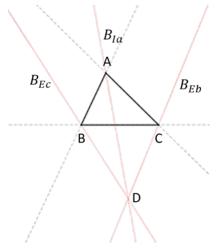
Teorema 1.1 (Concurrencia de dos bisectrices exteriores con una bisectriz interior)

Las bisectrices externas de cualesquiera dos ángulos de un triángulo $\triangle ABC$ son concurrentes con la bisectriz interna del tercer ángulo



♡

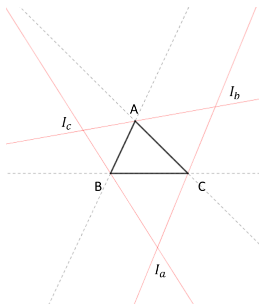
Demostración Tenemos que según la figura



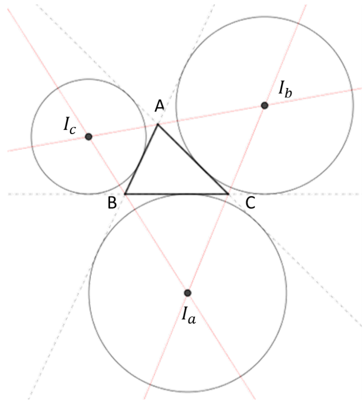
1. Cualquier punto P sobre B_{Ec} D del ángulo externo B, es equidistante de los lados AB y BC
2. Cualquier punto S sobre D B_{Eb} del ángulo externo C, equidista de los lados CA y BC
3. Si llamamos D al punto de intersección de las bisectrices externas B_{Ec} B_{Eb}, se tiene que D equidista de AB por (1) y de BC por (2), por lo tanto D se encuentra en la bisectriz del ángulo A

por tanto las bisectrices externas $B_{Ec},\ B_{Eb}$, junto con la bisectriz interna B_{Ia} del ángulo $\angle A$ son concurrentes en D. Procediendo de manera análoga con los otros ángulos $\angle B$ y $\angle C$ se obtiene el resultado. ■

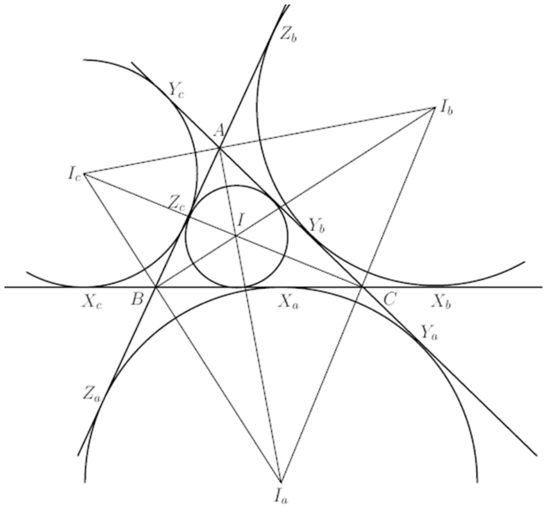
Llamamos I_a al punto de intersección de la bisectriz externa a los lados AB y BC y la bisectriz externa a los lados AC y BC. De la misma forma llamamos I_b al punto de intersección de la bisectriz externa a los lados BA y CA y la bisectriz externa a los lados CA y BC. Finalmente llamamos I_c al punto de intersección de la bisectrice externa a los lados BA y CA y la bisectriz externa a los lados CB y AB.



El círculo con centro I_b y radio r_b es uno de los tres excírculos excritos que tiene como tangentes a los tres lados y lo llamamos el **excírculo** (I_b, r_b), análogamente se definen (I_a, r_a), (I_c, r_c). Llamaremos a $I_a,\ I_b,\ I_c$ los **excentros** y sus radios $r_a,\ r_b,\ r_c$ sus **exradios**. Cada excírculo toca a uno de los lados del triángulo internamente y a los otros dos lados externamente, es decir, toca a la extensión del lado.



En la siguiente figura



observamos que, como dos tangentes desde un punto exterior del círculo tienen la misma longitud, entonces $BX_b = BZ_b$, además

$$\begin{aligned} BX_b + BZ_b &= (BC + CX_b) + (Z_bA + AB) \\ &= BC + CY_b + Y_bA + AB \\ &= a + b + c = 2s \end{aligned}$$

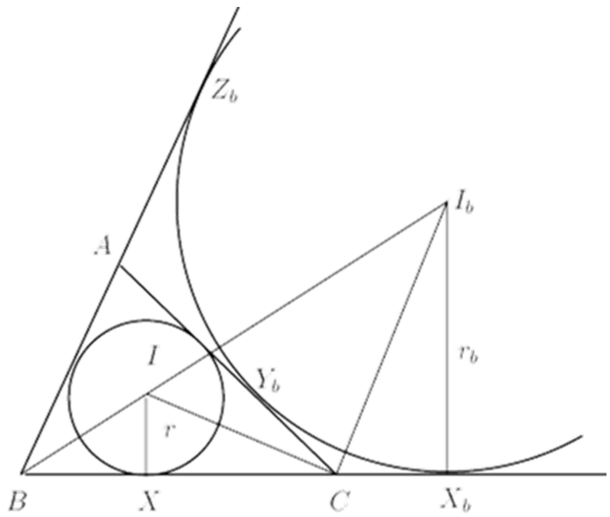
Luego las tangentes desde B al excírculo (I_b, r_b) tienen longitud s.
Similarmente sucede para cualquier otro vértice, por lo que tenemos

$$AY_a = AZ_a = BZ_b = BX_b = CX_c = CY_c = s$$

También tenemos que $CX_b = BX_b - BC = s - a$, y relaciones similares en todos los lados

- $BX_c = BZ_c = CX_b = CY_b = s - a$
- $CY_a = CX_a = AY_c = AZ_c = s - b$
- $AZ_b = AY_b = BZ_a = BX_a = s - c$

Podemos ahora calcular el radio del incírculo y el excírculo en términos de a, b y c, como sigue.
En la siguiente figura



tenemos que los triángulos $\triangle BIX$ y $\triangle BI_bX_b$ son semejantes, luego los lados son proporcionales y entonces,

$$\frac{r}{r_b} = \frac{BX}{BX_b} = \frac{s-b}{s} \tag{1.1}$$

donde s denota el semiperimetro.
Los triángulos $\triangle IXC$ y $\triangle CX_bI_b$ también son semejantes por ser de lados correspondientes perpendiculares (la bisectriz interior y exterior son perpendiculares).
Por lo tanto

$$\frac{r}{s-c} = \frac{s-a}{r_b} \Leftrightarrow r \cdot r_b = (s-c)(s-a) \tag{1.2}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones formado por $(1{,}1)$ y $(1{,}2)$ con incognitas r y r_b, obtenemos que:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$r_b = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}}$$

Tenemos ecuaciones análogas para los circunradios r_a y r_b de las otras dos circunferencias excritas

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Dado un triángulo $\triangle ABC$ pruebe que la bisectriz interior y la exterior en el vértice A, son perpendiculares