GEOMETRÍA MODERNA

Notas del curso Geometría Moderna 1

Unidad 4

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 4. Principales Teoremas

1.1 Teorema de Menelao

Menelao de Alejandría, alrededor del año 100 a.c. en un trabajo titulado Sphaerica, produjo la conocida versión plana del teorema que presentaremos aquí. Usó la versión plana para desarrollar el análogo esférico, que era el propósito de su tratado. Como hemos mencionado, este teorema, que hoy lleva el nombre de Menelao, no se popularizó hasta que fue redescubierto por Giovanni Ceva como parte de su obra en 1678.

Definición 1.1 (Punto de menelao)

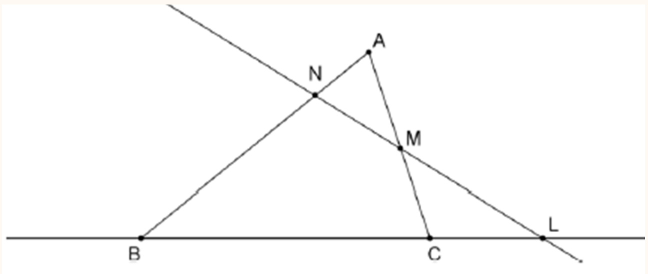
Un punto que esté en un lado de un triángulo, pero que no coincida con ningún vértice, se llama usualmente ***punto de Menelao*** *del triángulo para dicho lado.* ♣

Teorema 1.1 (Teorema de Menelao)

Si una recta interseca los tres lados BC, CA y AB del triángulo ABC en los puntos L, M y N respectivamente, entonces:

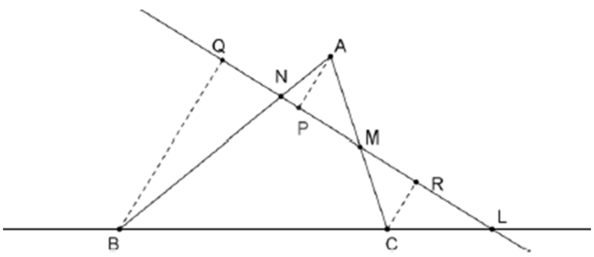
$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=-1$$

e inversamente si L, M y N son tres puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC, para los cuales se cumple la relación anterior, entonces los tres puntos son colineales.



♡

Demostración Sean P, Q y R los pies de las perpendiculares desde A, B y C a la recta determinada por L, M y N.



Se tiene $\triangle ANO \sim \triangle BNQ$ por lo que

$$\frac{AN}{NB}=\frac{PA}{BQ} \tag{1.1}$$

Se tiene $\triangle BLQ \sim \triangle CLR$ por lo que

$$\frac{BL}{LC}=\frac{QB}{CR} \tag{1.2}$$

Se tiene $\triangle CMR \sim \triangle AMP$ por lo que

$$\frac{CM}{MA}=\frac{RC}{AP} \tag{1.3}$$

Multiplicando (1,1), (1,2) y (1,3), se obtiene:

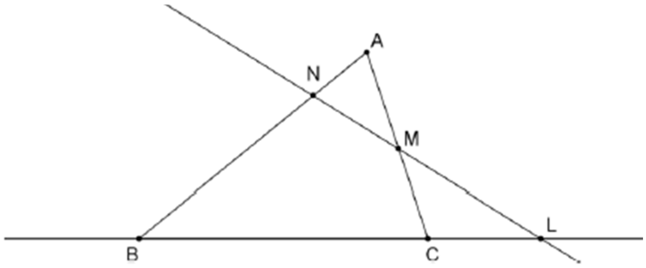
$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=\frac{PA}{BQ}\cdot\frac{QB}{CR}\cdot\frac{RC}{AP}=-1$$

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=-1$$

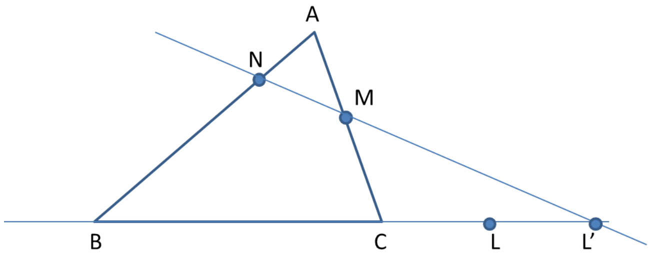
Inversamente Supongamos que si L, M y N son tres puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC, para los cuales se cumple la relación anterior,

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

entonces los tres puntos son colineales.



Dado un triángulo ABC y dos puntos N,M en los lados AB y AC respectivamente, ahora unimos con una recta los puntos N y M



y al punto de intersección con BC lo llamamos L'.
Se tiene entonces por Menelao que

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

y por hipótesis

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

de manera que

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1 = \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA}$$

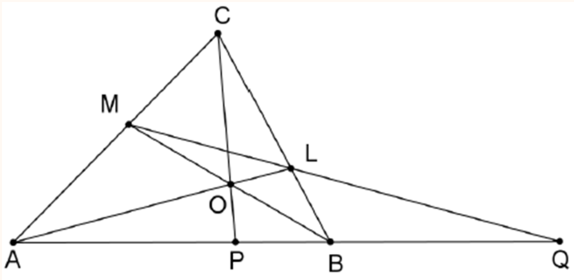
se tiene entonces que

$$\frac{BL}{LC} = \frac{BL'}{L'C}$$

y consecuentemente $L = L'$ y entonces los tres puntos son colineales. ■

Teorema 1.2 (Teorema de la división interna y externa)

Si P, L y M son puntos respectivamente en los lados AB, BC y CA del triángulo ABC, tales que AL, BM y CP son concurrentes y si la recta LM interseca AB en Q, entonces los puntos P y Q son conjugados armónicos con respecto al segmento AB.



♡

Demostración Ya que AL, BM y CP son concurrentes, por el teorema de Ceva se tiene que,

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

Ya que L, M y Q son colineales, por el teorema de Menelao se tiene que,

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

Se tiene entonces que,

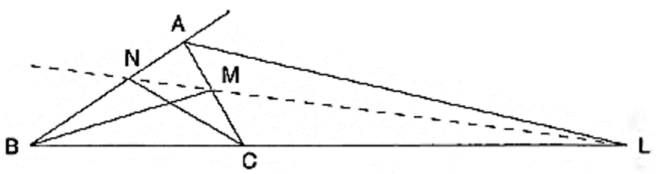
$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$$

por lo que P y Q son conjugados armónicos respecto del segmento AB. ■

1.2 Aplicaciones del teorema de Menelao

Antes de investigar otros teoremas famosos que pueden demostrarse utilizando el teorema de Menelao, consideraremos algunas aplicaciones del teorema de Menelao. Cada uno de estos teoremas sin nombre presenta algunos resultados muy interesantes que se prueban usando el teorema de Menelao.

✍ **Ejercicio 1.1** Sean N, M los pies de las bisectrices interiores de dos ángulos de un triángulo $\triangle ABC$ no isósceles y sea L la bisectriz del ángulo exterior del tercer ángulo, pruebe que N,M y L son tres puntos colineales. •



Solución *En el triángulo $\triangle ABC$, BM y CN son las bisectrices de los ángulos interiores, mientras que AL es la bisectriz exterior en el punto A. Debido a que la bisectriz de un ángulo (interior o exterior) de un triángulo divide el lado opuesto proporcionalmente a los dos lados restantes, tenemos:*

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}, \quad \frac{BN}{NA} = \frac{BC}{AC} \quad y \quad \frac{CL}{BL} = \frac{AC}{AB}$$

Por tanto, por multiplicación:

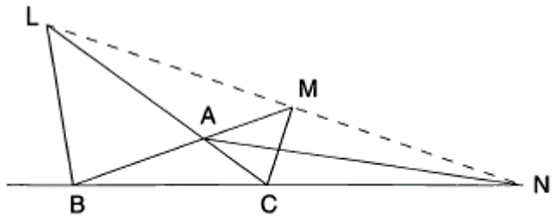
$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{CL}{BL} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

Como $\dfrac{CL}{BL} = \dfrac{-CL}{LB}$

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{CL}{LB} = -1$$

Por tanto, según el teorema de Menelao, los puntos N, M y L deben ser colineales. ■

✍ **Ejercicio 1.2** Demuestre que las bisectrices de los ángulos exteriores de cualquier triángulo no isósceles se encuentran con los lados opuestos en tres puntos colineales.



Solución *En el triángulo* $\triangle ABC$*, las bisectrices de los ángulos exteriores en A, B y C se encuentran con los lados opuestos (extendidos) en los puntos N, L y M, respectivamente. Debido a que la bisectriz de un ángulo (interior o exterior) de un triángulo divide el lado opuesto proporcionalmente a los dos lados restantes, tenemos:*

$$\frac{CL}{AL} = \frac{BC}{AB}, \quad \frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BC} \quad y \quad \frac{BN}{CN} = \frac{AB}{AC}$$

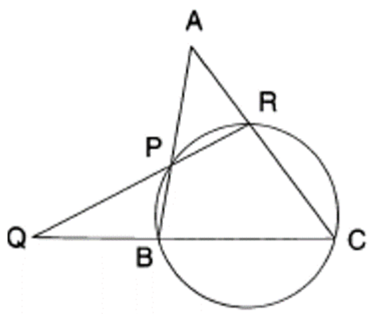
Por lo tanto:

$$\frac{CL}{AL} \cdot \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} = -1 \ \ (porque\ las\ tres\ proporciones\ son\ negativas)$$

Por tanto, según el teorema de Menelao, los puntos L, M y N son colineales. ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Un círculo que pasa por los vértices B y C de un triángulo $\triangle ABC$ se encuentra con AB en el punto P y AC en el punto Si PR se encuentra con BC en el punto Q,



demuestre que

$$\frac{QC}{QB} = \frac{(RC)(AC)}{(PB)(AB)}$$